Allenamento 2023 — Soluzioni

Gara a Squadre di Fisica

7 marzo 2023

Il progetto è sponsorizzato da

Materiale elaborato dalla collaborazione fra

Gruppo OliFis e Gruppo GaS
La lista dei collaboratori è reperibile all'indirizzo https://gas.olifis.it/#/about-us/

$\mathcal{P}$1 Riscalare il tempo

Il problema si risolve per analisi dimensionale. Le quantità che potrebbero contribuire al risultato sono:

- la massa m dell'oggetto, con dimensioni $[m] = \mathrm{kg}$;
- il modulo dell'accelerazione di gravità g, con dimensioni $[g] = \mathrm{m/s^2}$;
- il raggio R della guida, con dimensioni $[R] = \mathrm{m}$.

Si cerca una loro combinazione del tipo $T = k\, m^\alpha g^\beta R^\gamma$, con k costante adimensionale e gli esponenti da determinare. Le unità di misura di questa equazione sono

$$\mathrm{s} = \mathrm{kg}^\alpha \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^\beta \mathrm{m}^\gamma,$$

da cui si ricava $\alpha = 0$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 1/2$. Il tempo richiesto è quindi proporzionale alla radice del raggio della guida.

Risposta: $\boxed{3.11127\,\mathrm{s}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$2 Biliardo interrotto

Se la sorellina ha ragione, allora si deve conservare la quantità di moto lungo le due componenti parallela e ortogonale al lato lungo del tavolo. Le due componenti si trovano dunque rispettivamente calcolando:

$$u_\parallel = v - \sum_i v_i \cos\theta_i, \qquad u_\perp = -\sum_i v_i \sin\theta_i.$$

La risposta è $|u_\parallel| + |u_\perp|$, ma c'è da effettuare un ultimo controllo, ovvero che l'energia non sia aumentata. Serve quindi verificare che

$$v^2 > \sum_i v_i^2 + u_\parallel^2 + u_\perp^2,$$

che con i dati del testo è effettivamente valida.

Risposta: $\boxed{3.93016\,\mathrm{m/s}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$3 Bottiglietta in freezer

Dalla legge dei gas perfetti, possiamo legare pressioni, volumi e temperature iniziali e finali dell'aria come segue:

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}.$$

Le temperature iniziali e finali sono fornite nel testo del problema, mentre le pressioni sono entrambe pari a quella atmosferica. Detto V il volume della bottiglietta, si ha che $V_i = (1-f)V$. Alla fine, il volume dell'aria sarà cambiato, occupando lo spazio non occupato dal ghiaccio. Il volume del ghiaccio sarà quindi $V_g = fV\rho_a/\rho_g$, dove ρ_a e ρ_g sono le densità dell'acqua e del ghiaccio rispettivamente. Il volume finale del gas, invece, è

$$V_f = V\left(1 - f\frac{\rho_a}{\rho_g}\right).$$

Inserendo questa espressione nell'equazione dei gas perfetti, troviamo l'equazione risolutiva

$$(1-f)\frac{T_f}{T_i} = 1 - f\frac{\rho_a}{\rho_g},$$

che è una semplice equazione di primo grado. La sua soluzione è

$$f = \frac{1-\frac{T_f}{T_i}}{\frac{\rho_a}{\rho_g}-\frac{T_f}{T_i}}.$$

Risposta: $\boxed{0.52490.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}4$ Svuotamento di un secchio

La velocità dell'acqua appena esce dal foro si può trovare con il teorema di Torricelli, che è una conseguenza della legge di Bernoulli. Si noti che la sua corretta applicazione richiede che non siano presenti vortici nel fluido e che il secchio si svuoti abbastanza lentamente da poter trascurare la velocità di caduta dell'acqua nel secchio. Applicando dunque il teorema di Torricelli, detta v la velocità dell'acqua non appena esce dal foro, vale:

$$v = \sqrt{2gh},$$

dove h è l'altezza dell'acqua. La velocità del pelo dell'acqua è legata alla portata in uscita, che è l'opposto della derivata del volume di acqua nel secchio:

$$vS = -A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

Sostituendo nella legge di Torricelli, troviamo

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{S}{A}\sqrt{2gh},$$

che è un'equazione differenziale con soluzione

$$h(t) = \left(-\frac{St}{2A}\sqrt{2g} + \sqrt{h_0}\right)^2.$$

Dalla condizione al tempo $t_1 = 20\,\mathrm{s}$ fornita nel problema, si ottiene:

$$\left(\sqrt{1-f}-1\right)\sqrt{h_0} = -\frac{St_1}{2A}\sqrt{2g} \implies \sqrt{h_0} = \frac{St_1}{2A\left(1-\sqrt{1-f}\right)}\sqrt{2g}.$$

Il tempo di svuotamento complessivo si ottiene imponendo $h = 0$:

$$t_2 = \sqrt{\frac{h_0}{2g}}\frac{2A}{S} = \frac{t_1}{1-\sqrt{1-f}}.$$

La risposta è $t_2 - t_1$.

Risposta: $\boxed{169.44300\,\mathrm{s}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}5$ Discesa dal cilindro

L'energia si conserva durante la discesa del cilindro. Per questo motivo, possiamo scrivere

$$mg(R+r) = mg(R+r)\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Usando la condizione di rotolamento senza strisciamento, $v = \omega r$, e ricordando che il momento di inerzia di un cilindro cavo è $I = mr^2$, possiamo semplificare e ricavare

$$v^2 = g(R+r)(1-\cos\theta).$$

Adesso possiamo trovare la condizione di distacco: muovendosi su una circonferenza, la componente radiale della risultante delle forze deve essere uguale alla forza centripeta. Le forze radiali sono la reazione normale e una componente del peso. Si deve avere quindi

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R+r} \implies N = m\left(g\cos\theta - \frac{v^2}{R+r}\right).$$

La forza normale deve essere positiva con questa convenzione, in quanto il vincolo non può generare una forza diretta verso il centro della circonferenza. Per questo motivo,

$$N \geq 0 \implies g\cos\theta \geq \frac{v^2}{R+r}.$$

Usando l'espressione precedente, si trova

$$\cos\theta \geq 1-\cos\theta \implies \cos\theta \geq \frac{1}{2}.$$

Questa disequazione non è soddisfatta appena θ supera $\pi/3$.

Risposta: $\boxed{1.04720\,\text{rad.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}6$ Equazione del diodo

Per risolvere questo problema serve effettuare un fit con la calcolatrice grafica. Non si tratta di una procedura meccanica, in quanto questa funzione non è fra quelle normalmente disponibili in una calcolatrice tascabile. Quando si prova a fare un fit di una funzione non lineare, una buona idea è provare a linearizzarla, ovvero trovare un cambio di variabili intelligente che permetta di scrivere la legge fisica come una retta.

In questo caso non è possibile fare una linearizzazione esatta, ma guardando e riportando in un grafico i dati sperimentali possiamo accorgerci che la corrente I_0 deve essere molto piccola rispetto alla più piccola misura di corrente riportata. Per questo motivo, possiamo utilizzare l'approssimazione $e^x \gg 1$ quando x è sufficientemente grande, ottenendo una equazione di Shockley approssimata

$$I \approx I_0 \exp\left[\frac{eV}{\eta k_B T}\right].$$

Abbiamo ora una funzione esponenziale, la cui regressione si può trattare direttamente con le funzioni di default di una calcolatrice tascabile. Tuttavia, dato che è istruttivo, provvederemo a mostrare la procedura di linearizzazione. Possiamo dividere l'equazione approssimata di Shockley per una corrente arbitraria i_0 di nostra scelta,

$$\frac{I}{i_0} \approx \frac{I_0}{i_0}\exp\left[\frac{eV}{\eta k_B T}\right].$$

Possiamo ora prendere il logaritmo di entrambi i membri,

$$\ln \frac{I}{i_0} \approx \ln \frac{I_0}{i_0} + \frac{e}{\eta k_B T} V.$$

Se ora prendiamo, per esempio, $i_0 = 1\,\mathrm{mA}$ e tabuliamo la variabile $Y = \ln \frac{I}{i_0}$, usando i dati sperimentali, otteniamo un'equazione della forma

$$Y(V) = mV + q,$$

dove $m = \frac{e}{\eta k_B T}$ e $q = \ln I_0/i_0$. Questa è l'equazione di una retta. La regressione lineare si può risolvere con il metodo dei minimi quadrati ordinari, non avendo a disposizione incertezze sui dati sperimentali. L'intercetta q trovata con questo metodo può essere usata per ricavare I_0, invertendo la formula

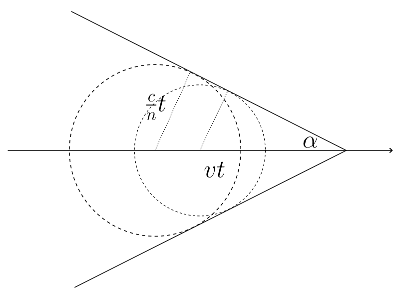
$$I_0 = i_0 e^q.$$

Una volta ottenuti i valori di m e q, basta inserire valore richiesto della tensione per avere il corrispondente valore della intensità di corrente. Metodi più raffinati possono essere usati per gestire meglio l'approssimazione fatta all'inizio, come una serie iterativa di fit, ma ciò non è necessario per ottenere una risposta all'interno della tolleranza consentita.

Risposta: $\boxed{1.91211\,\mathrm{mA.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}7$ Radiazione Cherenkov

In un tempo t, la particella si muove di uno spazio pari a vt, come in figura. La radiazione emessa al tempo 0 in quello stesso tempo ha percorso una distanza ct/n. Il fronte d'onda conico è l'inviluppo dei fronti d'onda della luce emessa nei vari punti della traiettoria, perciò esso sarà raggiunto ortogonalmente da alcuni raggi di luce. Poiché il moto è della particella è rettilineo uniforme, la direzione della velocità di questi raggi di luce è la stessa in ogni punto. Ne risulta che l'angolo di semiapertura del cono soddisfa $\sin\alpha = \frac{c}{nv}$.



Risposta: $\boxed{52.13635\,°.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}8$ Particelle su un segmento

Notiamo innanzitutto che possiamo ignorare gli urti tra le particelle. Ciò è una conseguenza del fatto che gli urti sono elastici e le particelle sono identiche, per cui la velocità di ogni particella dopo un urto sarà uguale alla velocità dell'altra particella se l'urto non fosse avvenuto. Dal teorema di equipartizione dell'energia, si ha che l'energia cinetica media delle particelle è $E = \frac{1}{2}k_B T$. La quantità di moto media delle particelle è dunque $p = \sqrt{2mE}$, e la quantità di moto media scambiata in ogni urto con le pareti vale $2p$. Per trovare la forza media su ciascuna parete, occorre moltiplicare per il numero di particelle e per il tempo medio tra un urto e il successivo:

$$F = 2p\frac{N}{2}\frac{p}{Lm} = \frac{k_B T N}{L}.$$

Risposta: $\boxed{4.14195\,\mathrm{N.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}9$ Lanci da piattaforme rotanti

Sia v la velocità del proiettile nel sistema di riferimento del laboratorio. Il rinculo fa ruotare la prima piattaforma a una velocità angolare pari a ω_1. Per la conservazione del momento angolare rispetto al centro della prima piattaforma,

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_1 = mvR.$$

Inoltre, il cannone, essendo solidale alla piattaforma, viene spinto indietro a una velocità pari a $\omega_1 R$. La velocità v' è proprio la velocità del proiettile nel sistema del cannone un istante dopo lo sparo:

$$v' = \omega_1 R + v = \left(\frac{2m}{M} + 1\right) v \implies v = \frac{M}{2m+M} v'.$$

Imponendo la conservazione del momento angolare rispetto al centro della seconda piattaforma nell'impatto con lo schermo di sabbia, si ottiene che

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + m\omega R^2 = mvR \implies \omega = \frac{2mv}{2mR + MR},$$

dove ω è la velocità angolare cercata.

Risposta: $\boxed{1.70000\,\mathrm{rad/s}}$. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}10$ Filo che si scalda

La condizione stazionaria dopo molto tempo richiede che ci sia un equilibrio negli scambi di calore con il filo: la potenza dissipata verso l'ambiente è pari a quella immessa per effetto Joule. In formule:

$$kA(T - T_a) = \frac{V^2}{R(1 + \alpha(T - T_0))},$$

dove k è una costante ignota. Quando viene applicata la tensione $V_1 = 20.0\,\mathrm{V}$, si ottiene

$$kA = \frac{V_1^2}{R(1 + \alpha(T_1 - T_0))(T_1 - T_a)}.$$

Sostituendo questo valore di kA nell'espressione precedente, e valutando la formula alla tensione $2V_1$, possiamo risolvere per T in funzione dei dati del problema. La soluzione cercata è la radice positiva della seguente equazione di secondo grado:

$$T^2 + T\left(\frac{1}{\alpha} - T_a - T_0\right) + T_0 T_a - \frac{T_a}{\alpha} - \frac{4}{\alpha}(T_1 - T_a)(1 + \alpha(T_1 - T_0)) = 0.$$

Risposta: $\boxed{39.02922\,^\circ\mathrm{C}}$. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}11$ Superman supersonico

La frequenza del suono viene modificata dall'effetto Doppler. Nel viaggio di andata, la frequenza del fronte che si avvicina alla cabina viene aumentata di un fattore $\frac{c}{c-v}$, in quanto la sorgente si muove verso di essa. Si noti che questa quantità è negativa, in quanto, muovendosi Superman più velocemente del suono, il suono prodotto sarà udito al contrario. Considerando il viaggio di ritorno, in esso Superman

sentirà una frequenza moltiplicata di un ulteriore fattore $\frac{c+v}{c}$, per via del moto dell'ascoltatore verso la sorgente.
Ne consegue che la frequenza udita è aumentata di un fattore $\frac{v+c}{v-c}$ rispetto a quella emessa. La velocità minima (maggiore di quella del suono) per cui è possibile udire il suono si ottiene imponendo che $f_{\text{max udibile}} = 20\,\text{kHz} = f_0 \frac{v+c}{v-c}$. Risolvendo l'equazione di primo grado, si trova

$$v = \frac{k+1}{k-1}c,$$

dove $k = f_{\text{max udibile}}/f_0$.

Risposta: $\boxed{346.86869\,\text{m/s}}$. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$12 Scaletta di resistenze

Supponiamo che ci siano n pioli invece di 5, e mostriamo per induzione che la risposta è indipendente da n.

- Se $n = 1$ il circuito è molto semplice: si nota che esso è equivalente a una resistenza a terra pari a R, dunque la tensione è pari a RI.
- Supponiamo che la resistenza equivalente R_n del circuito con n pioli sia pari a R. Allora, il circuito con $n+1$ pioli avrà una resistenza equivalente pari al parallelo della resistenza verticale $2R$ e della serie tra R (resistenza orizzontale) e $R_n = R$. Da ciò si può scrivere la relazione di ricorrenza $\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R+R_n}$. Sostituendo $R_n = R$, si trova $R_{n+1} = R$.

Il risultato cercato è dunque RI.

Risposta: $\boxed{33.00000\,\text{V}}$. *Errore massimo consentito:* 0.5%.