



Associazione
per l'Insegnamento
della Fisica



Olimpiadi di Fisica



35^a Edizione

Gara Nazionale, prova sperimentale - Senigallia (AN) giovedì 29 aprile 2021

Soluzione

OSCILLAZIONI E RIMBALZI

IN PRESENZA DI FORZE NON CONSERVATIVE

L'esperimento è diviso in due parti:

1. Studio delle trasformazioni di energia a cui è soggetta una sfera d'acciaio mentre compie oscillazioni rotolando senza strisciare in presenza di attrito volvente.
2. Studio dell'urto della sfera con la superficie piana e orizzontale del tavolo di lavoro.

PARTE PRIMA – GUIDA ARCUATA

Si conclude il montaggio dell'apparato sperimentale secondo le istruzioni, avendo cura di:

- controllare che il nastro che delimita la “pista” della sfera non presenti grinze e che la riga da disegno sia bloccata nel centro del listello di legno;
- controllare che l'apparato sperimentale sia orizzontale per es. posizionando la sfera direttamente sulla superficie del banco per vedere se essa rimane in equilibrio e osservando se la posizione di equilibrio della sfera posta sulla riga coincide con la linea di centro segnata sul listello.

Le Olimpiadi di Fisica
sono organizzate dall'AIF
su mandato del



MINISTERO DELL'ISTRUZIONE

Domanda 1

Il raggio si calcola utilizzando la formula data nel testo⁽¹⁾

$$T = 2\pi\sqrt{7(R-r)/(5g)} \quad (1)$$

Si pone la sfera in corrispondenza del punto di rilascio desiderato e la si tiene ferma usando una gomma per cancellare. La gomma viene poi tolta senza imprimere rotazioni iniziali indesiderate alla sfera. *Questo accorgimento andrà mantenuto in tutto l'esperimento.*

Esempio di misure

Quattro serie di misure relative alla durata di 10 oscillazioni hanno prodotto i risultati riportati a fianco, da cui si ricava il valore medio $\Delta t = 22.26$ s.

Il periodo (medio) delle oscillazioni, pertanto, vale $T = 2.23$ s, da cui si ottiene il raggio R :

$$R = \frac{5gT^2}{28\pi^2} + r = 0.89 \text{ m}.$$

$\Delta t_{(10)}$ [s]
22.29
22.24
22.27
22.23

In questa fase iniziale, per ottenere la misura del raggio R dell'arco di cerchio che approssima la più ampia porzione di guida, occorre che la sfera sia fatta muovere su un arco relativamente ampio alla partenza (nel testo si suggerisce 20 cm).

A causa dello smorzamento delle oscillazioni, il moto mostra ampiezze gradualmente più piccole, pertanto il valore di T e quindi il valore del raggio calcolato da T , rappresentano dei valori mediati sul percorso totale.

A questo punto è invece utile avere una misura del raggio che effettivamente descrive la guida reale, come suggerito dal testo che introduce la domanda 2.

Domanda 2

Si fissa un sistema di riferimento con origine nel punto inferiore della guida e assi orientati come in figura S1.

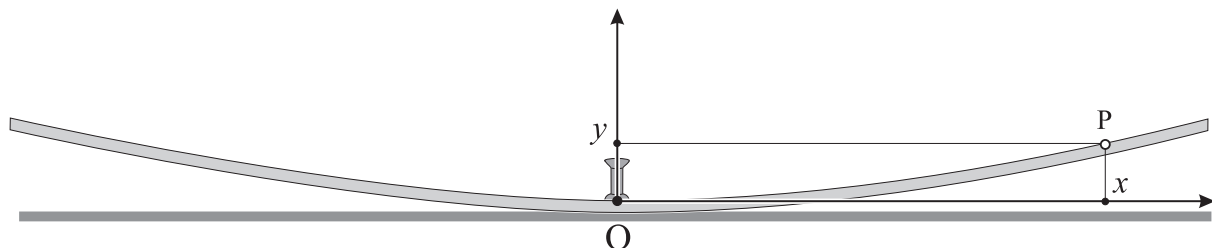


Figura S1

Ottenuto dalla (1) il raggio R , si determinano le altezze di alcuni punti della circonferenza mediante la relazione teorica $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$. Si misurano quindi direttamente tali altezze e si confrontano con quelle calcolate. Si individua infine la porzione di guida che meglio approssima i punti del cerchio di raggio R a meno di ± 2 mm tra le altezze calcolate e quelle misurate, come suggerito nel testo.

Usando una striscia di carta millimetrata opportunamente ritagliata o, in sua vece, i regoli millimetrati presenti sulle squadre da disegno in dotazione, si può misurare direttamente l'altezza y di un punto della riga in corrispondenza di alcune posizioni x fissate.

Non è necessario effettuare un controllo puntuale (es. centimetro per centimetro), anche per non perdere troppo tempo. Una possibile strategia è quella di suddividere la guida in fasce ampie $\Delta x = 5$ cm e individuare in quale zona (o fascia) lo scarto è minore di 0.2 cm. In tale zona si può poi procedere con un passo più piccolo (es. $\Delta x = 1$ cm) per individuare un valore ragionevole della coordinata x che costituisce il limite per il quale c'è la corrispondenza richiesta dal testo della prova.

Nella tabella che segue sono riportate le misure avendo scelto di usare un passo $\Delta x = 2.0$ cm.

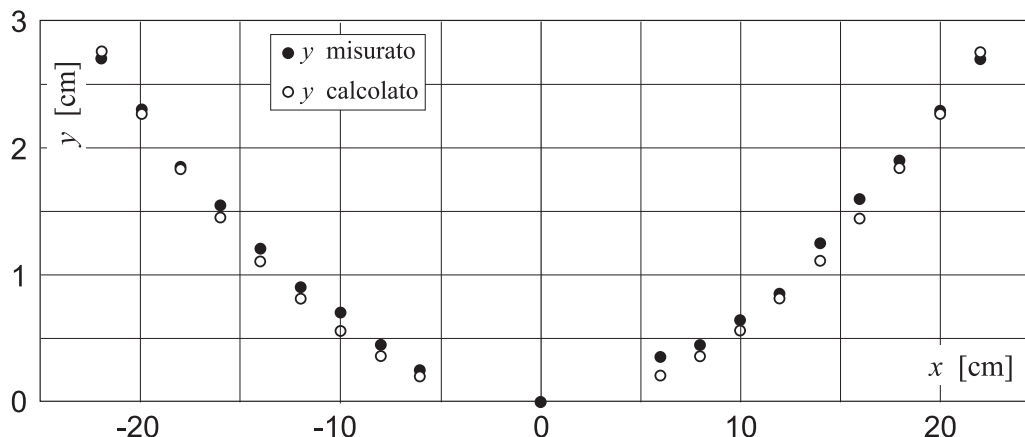
⁽¹⁾ La formula rappresenta il periodo delle piccole oscillazioni di una sfera che rotola senza strisciare, soggetta al suo peso. Per la dimostrazione della formula si veda l'appendice 1. Per approfondire la condizione di puro rotolamento si veda l'appendice 2.

Tabella 1

x [cm]	$y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ calcolata [cm]	y misurata [cm]	Scarto tra altezza calcolata e misurata [cm]
-22.0	2.76	2.70	0.06
-20.0	2.27	2.30	-0.03
-18.0	1.84	1.85	-0.01
-16.0	1.45	1.55	-0.10
-14.0	1.11	1.20	-0.09
-12.0	0.81	0.90	-0.09
-10.0	0.56	0.70	-0.14
-8.0	0.36	0.45	-0.09
-6.0	0.20	0.25	-0.05
0.0	0.00	0.00	0.00
6.0	0.20	0.35	-0.15
8.0	0.36	0.45	-0.09
10.0	0.56	0.65	-0.09
12.0	0.81	0.85	-0.04
14.0	1.11	1.25	-0.14
16.0	1.45	0.60	-0.15
18.0	1.84	0.90	-0.06
20.0	2.27	2.30	-0.03
22.0	2.76	2.70	0.06

Il grafico che segue (Grafico 1, non richiesto) fornisce una rappresentazione delle misure tabulate.

Grafico 1



Il semi-arco utile è individuato dall'ascissa $x = 22.0$ cm (semi-corda). L'ampiezza di tale semi-arco vale

$$\widehat{AB} = R \arcsin(x/R) = 22.2 \text{ cm}.$$

In pratica, se si posiziona la sfera sulla guida individuando archi di ampiezza inferiore a 22.2 cm, si rientra in una condizione di lavoro per la quale la forma della guida può essere ritenuta circolare.

Domanda 3

Poiché la sfera non scivola, la forza dissipativa \vec{F} è dovuta all'attrito volvente ed è proporzionale al modulo della forza \vec{N} di reazione vincolare che la guida applica alla sfera, ovvero

$$F = k N \quad (2)$$

dove k è il coefficiente di attrito volvente (k dipende sostanzialmente dalla natura delle superfici a contatto e dal raggio della sfera).

Il problema nasce dal fatto che N non è costante ma, come illustrato in figura S2, dipende dall'angolo θ e dalla velocità v del centro di massa secondo la relazione

$$N = m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{R - r} \right)$$

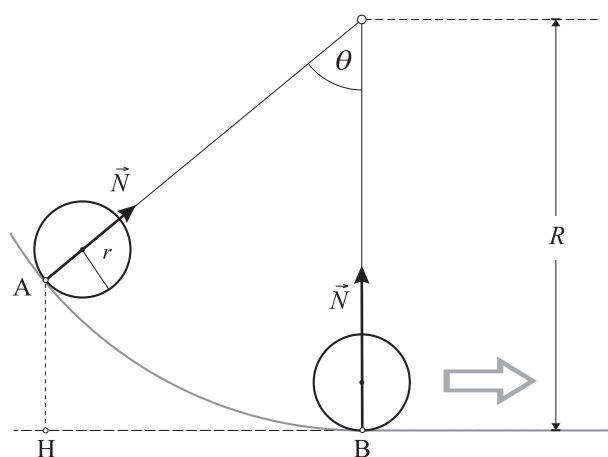


Figura S2

Se le oscillazioni sono di ampiezza sufficientemente piccola, \vec{N} è, in modulo, praticamente uguale al peso poiché l'arco su cui avviene il rotolamento e la corda sottesa sono praticamente coincidenti.

Un modo per controllare che le oscillazioni siano “piccole”, consiste proprio nel confrontare, per la posizione di partenza della sfera, la lunghezza del semi-arco misurata sul nastro millimetrato attaccato al profilo curvo e la lunghezza della semi-corda corrispondente misurata sul listello di legno e applicando lo stesso criterio di compatibilità usato nella risposta **2**, ossia che essi differiscano al massimo 0.2 cm. La stima può essere fatta a occhio oppure risolvendo la disequazione:

$$\widehat{AB} - \overline{HB} = R\theta - R \sin \theta < 0.2 \text{ cm}. \quad (3)$$

Per esempio, se la circonferenza ha raggio 89.2 cm, si trova $\theta < 0.238 \text{ rad}$ da cui la lunghezza del semi-arco massimo utile \widehat{AB} è di 21.2 cm.

Per questo semi-arco massimo si ha $\cos \theta = 0.972$, che differisce meno del 3% da 1 e quindi con una approssimazione accettabile. Durante le fasi successive alla partenza, l'accordo migliora ulteriormente.

Domanda 4

Per determinare k si misura quanto variano le lunghezze degli archi descritti nelle oscillazioni della sfera in funzione del numero delle oscillazioni. Si veda l'appendice 3 per la dimostrazione della formula di k indicata nel testo.

Esempio di misure

Facendo partire la sfera da una posizione individuata dall'arco $\widehat{AB} = 16.0 \text{ cm}$ e rilevando gli estremi delle oscillazioni dalla parte opposta a partire già dalla prima semi-oscillazione per poi proseguire ogni due, si ottiene, ad esempio

Tabella 2

n	\widehat{AB} [cm]	Smorzamento [cm]	Scarto dalla media degli degli smorzamenti (valore assoluto) [cm]
0	15.2		
2	13.1	2.1	0.04
4	10.6	2.5	0.44
6	9.0	1.6	0.46
8	6.9	2.1	0.04
10	4.9	2.0	0.06

Il Grafico 2, a pagina seguente, mostra che l'arco decresce linearmente con l'aumentare del numero delle oscillazioni.

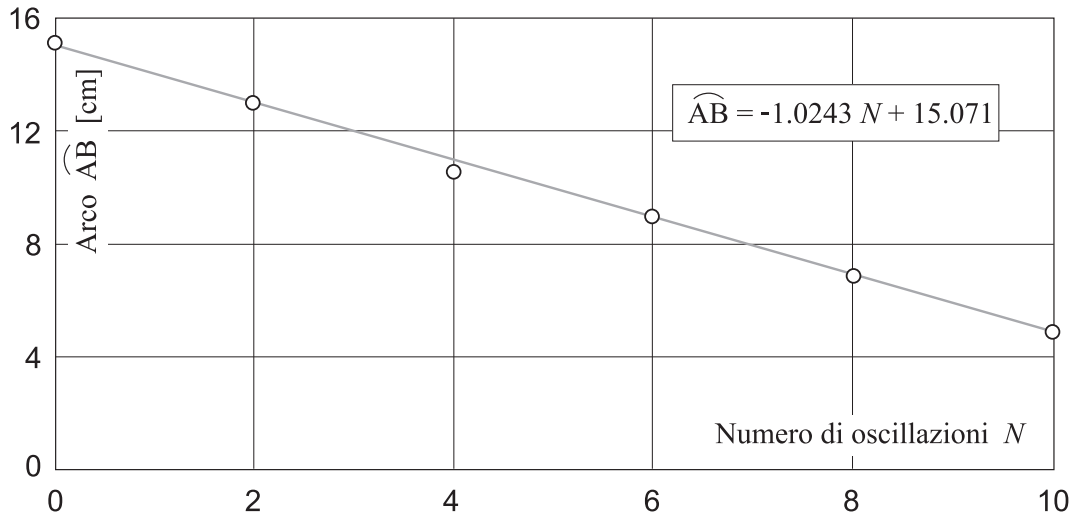
Si osserva anche che le deviazioni dalla linearità dei singoli punti sono dell'ordine di qualche millimetro su uno smorzamento medio ogni 2 oscillazioni di circa 2 cm, quindi l'incertezza con cui si può verificare che lo smorzamento sia costante (e pertanto che sia proporzionale a un valore costante di k), è dell'ordine del 10%.

La pendenza $p = \Delta \widehat{AB} / \Delta n$ della retta interpolatrice vale $-1.0243 \text{ cm/oscillazione}$. Assumendo la validità della relazione

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta n} = -4k \quad \text{con} \quad \frac{\Delta \theta}{\Delta n} = \frac{\Delta \widehat{AB}}{R \Delta n} = \frac{p}{R}, \quad \text{segue che} \quad k = -\frac{p}{4R} = 2.9 \times 10^{-3}.$$

È importante ripetere la misura e mediare i risultati su più prove. I valori di k ottenuti impiegando righe di diverso materiale hanno prodotto valori compresi tra 0.002 e 0.003.

Grafico 2



PARTE SECONDA

Domanda 5

Si modifica la forma della guida togliendo un angolare e realizzando così una rampa di lancio su cui far muovere la sfera in modo che, successivamente, atterri sul tavolo di lavoro. La sfera viene fatta partire da quote differenti. Il salto (H) è dato dallo spessore del listello di legno più quello della riga (figura S3).

La gittata è determinata dalla velocità che la sfera raggiunge nel punto C tenendo conto dell'energia dissipata dall'attrito. Si devono sempre considerare solo posizioni di partenza che consentano di applicare le approssimazioni fatte in precedenza.

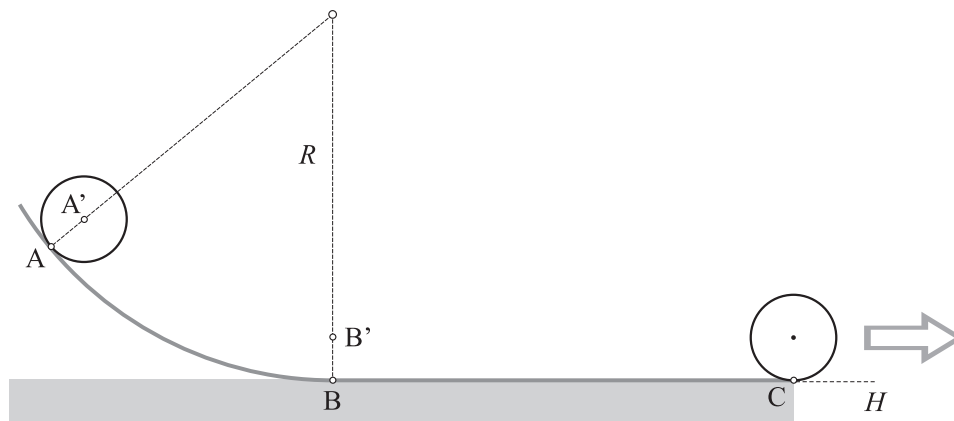


Figura S3

Dalla relazione suggerita dal testo, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{5}{7}(E_p - |W|)$ con E_p energia potenziale e $|W|$ lavoro della forza dissipativa in valore assoluto, posto (figura S3):

$$E_p = mg(R-r) \left[1 - \cos \frac{\widehat{AB}}{R} \right] \quad \text{e} \quad |W| = kmg \left(\widehat{A'B'} + \overline{BC} \right) = kmg\ell$$

si ottiene la velocità di lancio:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}g \left\{ (R-r) \left[1 - \cos \frac{\widehat{AB}}{R} \right] - k\ell \right\}} \quad (4)$$

Detta H l'altezza di caduta della pallina misurata rispetto al tavolo di lavoro, il tempo di volo della pallina sarà dato da $t = \sqrt{2H/g}$. Pertanto, la gittata è

$$G = v \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{20}{7}H \left\{ (R-r) \left[1 - \cos \frac{\widehat{AB}}{R} \right] - k\ell \right\}} \quad (5)$$

È interessante notare che il termine dovuto all'attrito diventa sempre più importante quanto più piccolo è l'arco \widehat{AB} in quanto ℓ rimane comunque relativamente grande.

Le gittate, noto k , sono pertanto prevedibili. Si può studiare l'accordo tra le previsioni e le misure dirette di gittata (e dei rimbalzi successivi) che si possono rilevare con la tecnica della carta carbone.

Esempio di misure

Si pone, sul tavolo di lavoro, una striscia di carta millimetrata allineata con la rampa di lancio, in modo che dalla scala millimetrata si possa risalire direttamente alla misura di gittata richiesta.

Si pone la parte annerita di un foglio di carta carbone a contatto con la striscia di carta millimetrata. La rampa viene sistemata in modo che il bordo da cui si stacca la sfera sia posizionato sulla verticale dello 0 della scala.

Quando la sfera atterra sul tavolo l'urto lascia una traccia puntiforme e ben evidente sulla striscia millimetrata e ciò consente di effettuare direttamente la misura delle gittate.

La posizione di partenza della sfera sulla rampa si determina usando il nastro millimetrato di carta. La carta millimetrata. Una striscia di carta millimetrata o, in sua vece, il regolo millimetrato inciso sulle squadre da disegno, consente la misura dell'altezza H .

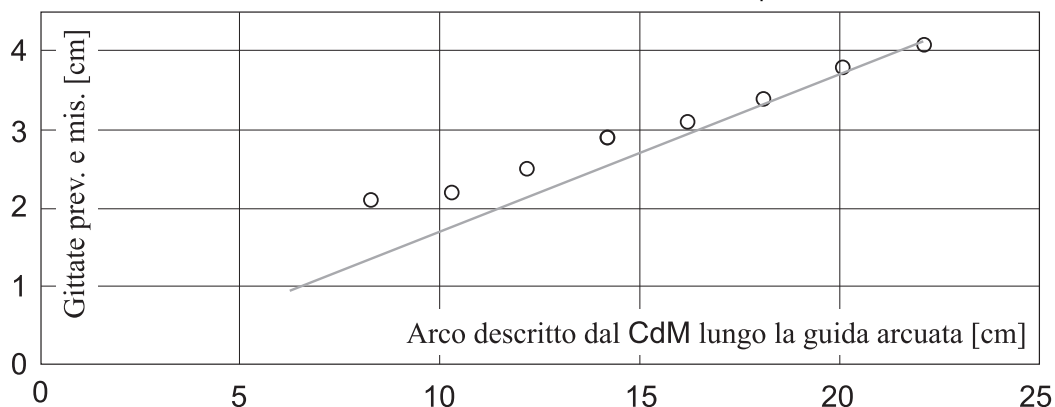
Qualora il tavolo non fosse orizzontale, ruotando l'apparato di 180° potrebbero proporsi misure diverse, al di fuori di un margine di compatibilità ragionevole ($\pm 0.1 \div 0.2$ cm). Si controlla dunque l'orizzontalità, oppure si mediano le gittate misurate nelle due direzioni di lancio.

Tabella 3

k	coefficiente di attrito	0.0029		
r	raggio sfera	1.27	[cm]	
R	raggio guida	89.2	[cm]	
H	altezza del volo	2.3	[cm]	
\overline{BC}	tratto rettilineo sulla guida	30.8	[cm]	
\widehat{AB} [cm]	$\widehat{A'B'}$ [cm]	ℓ [cm]	G_{prev} [cm]	G_{mis} [cm]
20.4	20.1	50.9	3.8	3.8
18.4	18.1	48.9	3.4	3.4
16.4	16.2	47.0	3.0	3.1
14.4	14.2	45.0	2.6	2.9
12.4	12.2	43.0	2.2	2.5
10.4	10.3	41.1	1.8	2.2
8.4	8.3	39.1	1.4	2.1
6.4	6.3	37.1	0.9	2.0

Grafico 3

G_{prev} (prevista, linea continua) e G_{mis} (misurata, cerchietti) in funzione dell'ampiezza dell'arco $\widehat{A'B'}$ descritto dal CdM della sfera. Tutte le distanze sono espresse in centimetri.



Si osserva che, riducendo la velocità, si riduce di pari passo anche la gittata e vi è una buona corrispondenza tra misura e previsione per $16.4\text{ cm} \leq \widehat{AB} \leq 20.4\text{ cm}$. Tuttavia, con velocità “basse” l'accordo non è più soddisfacente e le gittate misurate sono maggiori di quelle previste. È l'effetto del bordo che, come suggerito dal testo, altera il comportamento della sfera.

Al bordo, infatti, la reazione vincolare \vec{N} con il piano cambia in direzione come illustrato nella figura a fianco, il che fa sì che possa innescarsi un moto di rotazione nella fase precedente il distacco (figura S4). Durante questa rotazione l'equazione del moto del centro di massa della sfera è

$$m\omega^2 r = mg \cos \alpha - N.$$

La sfera si stacca dal bordo quando è $N = 0$. Se $m\omega^2 r \geq mg$ ciò avviene già per $\alpha = 0$. Poiché è pure $\omega = v/r$, con v velocità di traslazione del centro di massa, l'assenza di rotazione attorno al bordo è garantita se $v \geq \sqrt{rg} \approx 35.3\text{ cm s}^{-1}$.

Se tale condizione non è rispettata occorre tenere conto che la forza \vec{N} ammette sia una componente orizzontale diretta nella direzione del moto che una componente verticale diretta verso l'alto. L'impulso associato alla componente orizzontale di \vec{N} causa un aumento della componente orizzontale della velocità che è la principale causa dell'aumento della gittata. Da notare anche che, durante la rotazione attorno al bordo, la forza peso produce un momento che altera la velocità angolare della sfera.



Figura S4

Tabella 4

Arco [cm]	Velocità di lancio [cm s ⁻¹]
20.4	54.0
18.4	48.4
16.4	42.8
14.4	37.1
12.4	31.3
10.4	25.5
8.4	19.3
6.4	12.6

Le velocità di lancio determinate dalle misure in Tabella 3 porgono i seguenti risultati:

Poiché la velocità limite è di 35.3 cm s^{-1} , la velocità di lancio risulta superiore a tale valore solo per le prime 4 misure, il che spiega perché, solo per queste misure, c'è un buon accordo fra i valori della gittata misurati e quelli calcolati trascurando l'effetto del bordo.

Domanda 6

La tecnica della carta carbone permette di rilevare, dopo il lancio, le tracce di almeno tre rimbalzi consecutivi della sfera sul tavolo di lavoro. È possibile utilizzare le informazioni ricavabili dalle tracce per studiare i processi che caratterizzano il comportamento della sfera mentre rimbalza.

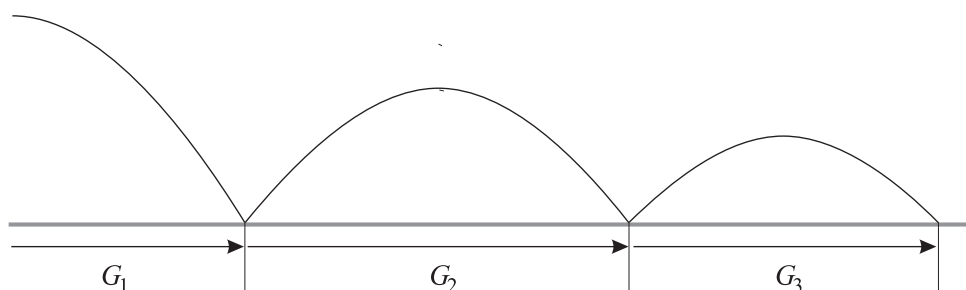


Figura S5

La sfera lascia il bordo della guida con velocità orizzontale $v = v_x$ [formula (4)], rispetto al tavolo e momento angolare $L = I\omega$. Siano G_1, G_2, G_3 le lunghezze delle prime tre gittate successive (vedi figura S5).

Si ammettono vere due ipotesi:

- (a) l'urto col tavolo non modifica ω e v_x ;
 (b) il coefficiente di restituzione e (definito dal rapporto tra le componenti verticali delle velocità in uscita e in ingresso nell'urto) è costante.

È interessante osservare che la prima ipotesi nasce dal fatto che la condizione di rotolamento raggiunta dalla sfera sulla guida implica che, rispetto al tavolo, il punto di contatto abbia velocità relativa nulla, per cui non ci sia scivolamento. Tuttavia, nell'urto con il tavolo c'è senz'altro una deformazione locale delle parti e questa può originare effetti legati all'attrito volvente. Tenendo conto della precisione delle misure che si possono eseguire con l'apparato a disposizione, si assume che tali effetti siano trascurabili.

Detto questo, nell'ipotesi che la componente della velocità orizzontale rimanga costante durante i rimbalzi, avremo che le gittate saranno direttamente proporzionali ai rispettivi tempi di volo. Questi ultimi sono direttamente proporzionali alle componenti verticali della velocità con cui la sfera esce dall'urto.

Inoltre, se il coefficiente di restituzione è costante, allora, sarà costante pure il rapporto tra i tempi di volo e, in ultima analisi, pure il rapporto tra le gittate. Considerata la geometria delle traiettorie (nella prima gittata il tempo di volo fa descrivere solo metà parabola), si può concludere che, se le ipotesi sono rispettate, deve risultare $G_3/G_2 = G_2/(2G_1)$.

Il coefficiente di restituzione nel primo e nel secondo urto, saranno rispettivamente:

$$e_1 = \frac{v'_{1y}}{v_{1y}} = \frac{G_2}{2G_1} \quad e_2 = \frac{v'_{2y}}{v_{2y}} = \frac{G_3}{G_2}$$

E ci si aspetta che sia $e_1 = e_2 = e$.

Esempio di misure

L'uso della carta carbone permette di distinguere 4-5 rimbalzi, tuttavia è opportuno prendere in considerazione solo le prime tracce, poiché l'errore di misura incide significativamente sulle successive.

La posizione di partenza va scelta in modo che vengano esclusi gli effetti di bordo e, se la velocità di lancio $v = v_x$ si calcola con la formula (4), occorre accertarsi che sia verificata la condizione per cui la forza normale abbia direzione praticamente uguale a quella del peso anche nel tratto curvilineo della traiettoria. Tuttavia, quest'ultima condizione può essere ignorata se, in luogo di calcolare la v con la formula (4), la si misura impiegando la relazione $v = G_1/\sqrt{2H/g}$. Il vantaggio di questo secondo metodo è che si possono realizzare gittate maggiori, facendo partire la sfera dalla sommità della guida, guadagnando in precisione.

Tabella 5

arco [cm]	G_1 [cm]	G_2 [cm]	G_3 [cm]	G_4 [cm]	$G_2/(2G_1)$	G_3/G_2	G_4/G_3
15	2.95	3.60	2.15	1.25	0.61	0.60	0.58
16	3.15	3.65	2.20	1.30	0.58	0.60	0.59
17	3.30	3.80	2.25	1.40	0.58	0.59	0.62
18	3.45	4.05	2.35	1.40	0.59	0.58	0.60
19	3.65	4.35	2.50	1.50	0.60	0.57	0.60
20	3.80	4.35	2.55	1.55	0.57	0.59	0.61
21	3.90	4.55	2.65	1.60	0.58	0.58	0.60

Come si vede, il coefficiente di restituzione è pressoché costante e prossimo a 0.6, il che conferma la correttezza sostanziale del modello. Le misure sono state ripetute usando tavoli con diversi materiali del piano di appoggio. I coefficienti di restituzione hanno mostrato una certa variabilità con valori medi che si attestano attorno a $0.6 \pm 10\%$.

Domanda 7

Per quanto concerne il rapporto tra l'energia cinetica dopo e prima dell'urto, ovvero il coefficiente ρ , si può scrivere

$$\rho = \frac{E_f}{E_i} = \frac{\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{1y}^2}{\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{1y}^2} = \frac{v_x^2 + v_{1y}^2 + \frac{2}{5}r^2\omega^2}{v_x^2 + v_{1y}^2 + \frac{2}{5}r^2\omega^2} = \frac{\frac{7}{5}v_x^2 + v_{1y}^2}{\frac{7}{5}v_x^2 + v_{1y}^2} \quad (6)$$

Esempio di misure

Il coefficiente ρ , nel primo urto, risulta:

Tabella 6

arco [cm]	G_1 [cm]	G_2 [cm]	v_x [cm s ⁻¹]	v_y [cm s ⁻¹]	ρ
15	2.95	3.60	43.5	40.5	0.61
16	3.15	3.65	46.5	38.5	0.61
17	3.30	3.80	48.7	38.2	0.62
18	3.45	4.05	50.9	39.0	0.64
19	3.65	4.35	53.9	39.6	0.66
20	3.80	4.35	56.1	38.0	0.66
21	3.90	4.55	57.6	38.7	0.68

Si osserva una buona regolarità. Il leggero trend in crescita di queste misure non è stato confermato da altre serie di dati.

Per quanto concerne la dipendenza di ρ dal materiale del piano di appoggio, si sono trovati valori variabili da 0.6 a 0.7.

APPENDICE 1

Legge oraria delle oscillazioni nell'ipotesi di forza d'attrito volvente costante

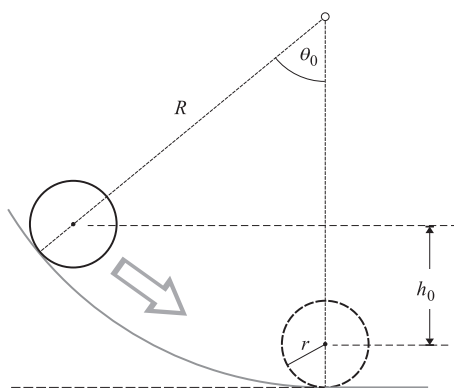


Figura S6

Con riferimento alla figura S6, siano:

Energia potenziale gravitazionale alla partenza:

$$mgh_0;$$

Energia potenziale gravitazionale in un istante generico del moto in cui l'altezza del CdM è h :

$$mgh;$$

Energia cinetica nello stesso istante:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2,$$

con ω velocità angolare della sfera;

Lavoro fatto dalla forza d'attrito volvente di modulo F , nell'ipotesi che essa sia costante:

$$F(R-r)(\theta - \theta_0).$$

L'energia finale è pari all'energia iniziale più il lavoro della forza d'attrito:

$$mgh + \frac{7}{10}mv^2 = mgh_0 + F(R-r)(\theta - \theta_0).$$

La condizione di rotolamento che caratterizza il moto della sfera fa sì che l'arco $(R-r)d\theta$ descritto dal centro di massa sia uguale a $-r d\beta$, con $d\beta$ corrispondente rotazione della sfera attorno al CdM (il segno meno è dovuto al fatto che le due rotazioni $d\beta$ e $d\theta$ hanno versi opposti). D'altra parte, è $\dot{\beta} = \omega$, per cui si ha $-r\omega = (R-r)\dot{\theta}$, e ancora $\omega = -\dot{\theta}(R-r)/r$. Segue

$$mgh_0 = mgh + \frac{7}{10}mr^2 \left[\dot{\theta} \frac{R-r}{r} \right]^2 - F(R-r)(\theta - \theta_0).$$

Derivando rispetto al tempo:

$$mg\dot{h} + \frac{7}{5}mr^2 \left[\frac{R-r}{r} \right]^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - F(R-r)\dot{\theta} = 0.$$

Dalla figura si vede che, in generale, è

$$h = (R - r)(1 - \cos \theta) \quad \text{per cui è} \quad \dot{h} = (R - r) \sin \theta \dot{\theta},$$

e si ottiene

$$mg(R - r) \sin \theta \dot{\theta} + \frac{7}{5} mr^2 \left[\frac{R - r}{r} \right]^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - F(R - r) \dot{\theta} = 0.$$

Con ciò si può scrivere

$$g \sin \theta + \frac{7}{5} (R - r) \ddot{\theta} - \frac{F}{m} = 0.$$

Nel limite di piccole oscillazioni, $\sin \theta \approx \theta$, si ottiene

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \theta = \frac{5F}{7m(R - r)} \quad \text{che è del tipo} \quad \ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = \text{costante} \quad (\text{in una semioscillazione})$$

in cui si riconosce che l'oscillazione ha periodo: $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \frac{R - r}{g}}$.

APPENDICE 2

Condizione di puro rotolamento

Per la derivazione della condizione di rotolamento conviene partire dalle equazioni del moto. Supponendo inizialmente trascurabili le forze di attrito dinamico, le forze in gioco, che determinano la variazione della velocità \vec{v} del CdM, sono la componente della forza peso lungo la direzione del moto di modulo $mg \sin \theta$ e la forza F_s di attrito statico. Inoltre, il momento della forza di attrito statico di modulo rF_s determina la variazione del momento angolare. Possiamo quindi scrivere:

$$-mg \sin \theta + F_s = m \frac{dv}{dt}, \quad F_s r = I \frac{d\omega}{dt}$$

La condizione di rotolamento implica che il punto di contatto della sfera con la guida sia fermo rispetto alla guida stessa e ciò accade se $r\omega = -v$ e quindi $r d\omega/dt = -dv/dt$. Pertanto, tenendo conto che $I = \frac{2}{5} mr^2$, si ottiene

$$F_s = \frac{2}{7} mg \sin \theta$$

La condizione di rotolamento è rispettata se il rapporto tra la forza di attrito statico F_s e la reazione vincolare N si mantiene al di sotto del coefficiente di attrito statico μ_s . Essendo $N = mg \cos \theta + mv^2/(R - r)$, si ottiene:

$$\mu_s > \frac{2}{7} \frac{mg \sin \theta}{mg \cos \theta + mv^2/(R - r)}$$

Durante la discesa il numeratore diminuisce e il denominatore aumenta, pertanto la condizione critica si ha alla partenza, dove si ha la massima richiesta per il valore di μ_s :

$$\mu_s > \frac{2}{7} \operatorname{tg} \theta_0$$

Con la guida usata dai concorrenti, alla partenza è $\operatorname{tg} \theta_0 \approx 0.02$, quindi deve essere $\mu_{s,\max} \geq 0.06$. Il coefficiente di attrito per plexiglas-acciaio è $0.4 \div 0.5 \gg 0.06$. Pertanto, la condizione di rotolamento è senz'altro garantita alla partenza e, a maggior ragione, durante le altre fasi del moto.

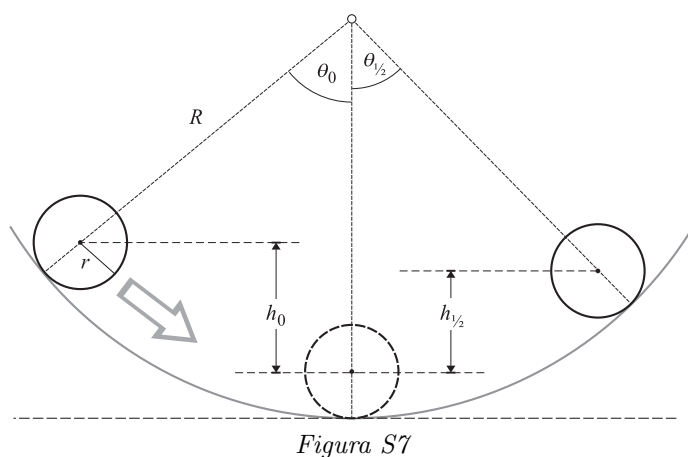
L'attrito rende meno stringente la condizione precedente. Esprimendo il modulo della forza \vec{F} , dovuta all'attrito volvente, come prodotto di N per un coefficiente k , che si assume rimanga circa costante durante il moto, $F = kN$, al secondo membro della relazione precedente va semplicemente sottratto il termine k :

$$\mu_s > \frac{2}{7} \operatorname{tg} \theta_0 - k.$$

APPENDICE 3

Dimostrazione della relazione $\Delta\theta = -4k$

Facendo riferimento alla figura S7 (a pagina seguente), sia θ_0 l'angolo che esprime la posizione della sfera alla partenza delle oscillazioni. Alla fine della prima semi oscillazione, quando la velocità della sfera è nulla, dal bilancio energetico si ottiene:



$$mgh_0 = mgh_{1/2} - kmg(R-r)(\theta_{1/2} - \theta_0)$$

Si noti che per questa mezza oscillazione la differenza algebrica degli angoli è negativa e il segno meno davanti al coefficiente di attrito k compensa il segno di $\theta_{1/2} - \theta_0$ per fornire il giusto contributo al bilancio energetico dato dal lavoro fatto dalla forza di attrito.

L'equazione può essere scritta considerando che

$$h = (R-r)(1 - \cos \theta)$$

e che per angoli piccoli è $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ ottenendo

$$(\theta_0^2 - \theta_{1/2}^2)/2 = -k(\theta_{1/2} - \theta_0),$$

da cui si ricava $\theta_{1/2} + \theta_0 = 2k$.

Al termine della semi oscillazione successiva il bilancio energetico comporta che:

$$mgh_{1/2} = mgh_1 + kmg(R-r)(\theta_1 - \theta_{1/2})$$

Stavolta, la differenza algebrica $\theta_1 - \theta_{1/2}$ è positiva. Sempre usando l'ipotesi valida per piccole ampiezze di oscillazione, si ottiene, al completamento della prima oscillazione $\theta_1 + \theta_{1/2} = -2k$. In definitiva, dopo un'oscillazione completa si ha:

$$\theta_1 - \theta_0 = -4k.$$

Il ragionamento può essere esteso alle oscillazioni successive ottenendo sempre lo stesso risultato: ad ogni oscillazione l'ampiezza angolare $\Delta\theta$ si riduce di $4k$.

per provare a rifarlo...

Indicazioni sui materiali da procurarsi per ripetere l'esperienza:

Listello di abete piallato: dimensioni 7×2 cm

Angolari metallici: dimensioni $5 \times 5 \times 4$ cm, spessore di 3 mm: [sigla: 50x50x40x0,3]

Sfera di acciaio per cuscinetti da 1 pollice di diametro (25.4 mm)

Materiale elaborato dal Gruppo



PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica

e-mail: segreteria@olifis.it

WEB: www.olifis.it



NOTA BENE

È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.