## Introduzione

In questo problema si studia un processo efficiente per produrre vapore. Esso trova riscontro anche sperimentalmente. Una soluzione acquosa di nanoparticelle d'argento di forma sferica, con solo $10^{13}$ particelle per litro, viene illuminata con un fascio di luce monocromatica focalizzata. Una frazione della luce viene assorbita dalle nanoparticelle, che si riscaldano e generano localmente, attorno a loro, del vapore senza riscaldare l'intera soluzione. Il vapore viene rilasciato dal sistema sotto forma di bollicine che possono sfuggire e venir raccolte sopra la soluzione. Non tutti i dettagli di questo processo sono noti, ma il nocciolo della spiegazione è che la luce viene assorbita per mezzo di oscillazioni collettive degli elettroni delle nanoparticelle metalliche. L'apparecchio che sfrutta questo processo è chiamato generatore di vapore a plasmoni. La Fig. 2.1, qui sotto, aiuta nel processo di schematizzazione del problema.

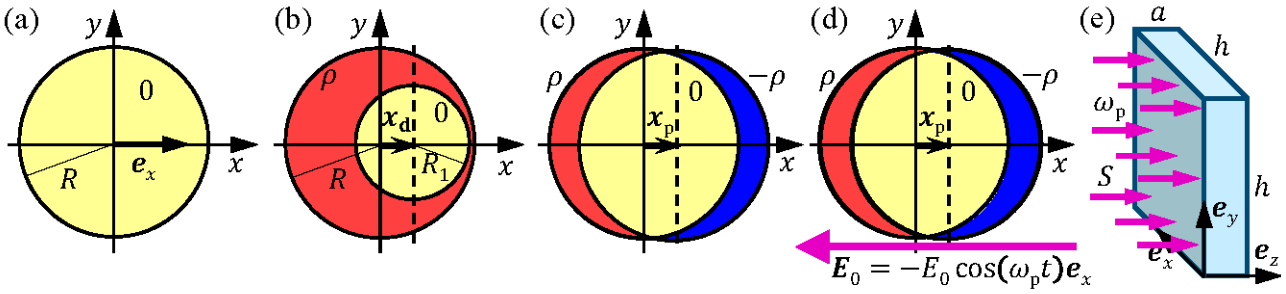


**Figura 2.1 (a)** Una nanoparticella elettricamente neutra avente forma sferica di raggio $R$ con il centro nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano. **(b)** Una sfera con una densità di carica positiva e omogenea $\rho$ (in colore rossiccio) contiene una regione sferica più piccola e senza carica elettrica (0, in colore giallino) avente raggio $R_1$ con il centro spostato di $\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}} = x_{\mathrm{d}}\, \boldsymbol{e}_x$ rispetto all'origine del sistema di riferimento. **(c)** La sfera con densità positiva di carica $\rho$ formata dagli ioni d'argento della nanoparticella è fissata nell'origine del sistema di riferimento. Il centro della regione sferica di carica avente densità $-\rho$ (in colore blu) dovuta alla nuvola elettronica è spostata di $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$, con $x_p \ll R$. **(d)** È stato applicato un campo elettrico esterno omogeneo $\boldsymbol{E}_0 = -E_0 \boldsymbol{e}_x$. Per un campo $\boldsymbol{E}_0$ dipendente dal tempo, la nuvola elettronica si muove con velocità $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}t$. **(e)** Il recipiente di dimensioni $h \times h \times a$ che contiene la soluzione acquosa di nanoparticelle viene illuminato da luce monocromatica che si propaga lungo l'asse $z$ con pulsazione angolare $\omega_p$ e intensità $S$.

## Una nanoparticella d'argento singola

In questo problema si considera una nanoparticella d'argento di forma sferica e raggio $R = 10.0\ \mathrm{nm}$ con il centro posto nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane (vedi Fig. 2.1(a)). Inoltre, ogni moto, ogni forza e ogni campo sono paralleli all'asse orizzontale $x$ (avente $\boldsymbol{e}_x$ come versore unitario).

La nanoparticella contiene elettroni di conduzione liberi che si possono muovere ovunque, nel volume della nanoparticella stessa, senza essere legati a nessun atomo d'argento in particolare. Ogni atomo di argento è uno ione positivo che ha donato uno degli elettroni liberi.

| | | |
|---|---|---|
| 2.1 | Ricava le quantità seguenti: il volume $V$ e la massa $M$ delle nanoparticelle, il numero di ioni $N$ e la densità di carica $\rho$ degli ioni d'argento nella particella, e, per gli elettroni liberi, la loro concentrazione $n$, la loro carica totale $Q$, e la loro massa totale $m_0$. | 0.7 |

## Il campo elettrico nei punti di una regione priva di carica elettrica, situata all'interno di una sfera carica elettricamente

Nel resto del problema assumi che la costante dielettrica relativa di tutti i materiali sia $\varepsilon = 1$. Ora, all'interno di una sfera con densità di carica positiva ed omogenea $\rho$ avente raggio $R$ viene generata una piccola regione sferica senza carica elettrica avente raggio $R_1$. Per ottenere ciò si aggiunge una carica elettrica negativa di densità $-\rho$, con il centro spostato di $\boldsymbol{x}_\mathrm{d} = x_\mathrm{d}\, \boldsymbol{e}_x$ dal centro della sfera di raggio $R$, (vedere la Fig. 2.1(b)).

| | | |
|---|---|---|
| 2.2 | Dimostra che il campo elettrico all'interno della regione neutra è omogeneo e che la sua espressione è data da $\boldsymbol{E} = A\,(\rho/\varepsilon_0)\,\boldsymbol{x}_\mathrm{d}$. Determina il fattore di proporzionalità A. | 1.2 |

## La forza di richiamo che agisce sulla nuvola di carica elettronica spostata

Nel seguito, si studia il moto collettivo degli elettroni liberi. Per fare ciò si rappresenta il sistema come una singola sfera con densità di carica omogenea e negativa $-\rho$, con il centro nella posizione $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$, e che si può muovere lungo l'asse $x$. Il centro della sfera positiva di carica (fatta di ioni d'argento), rispetto al quale si muove la sfera di carica negativa, è fisso nell'origine del sistema di coordinate (vedi la Fig. 2.1(c)). Assumi che una forza esterna $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ sposti la nuvola elettronica fino a una nuova posizione di equilibrio $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = x_\mathrm{p}\,\boldsymbol{e}_x$ con $|x_\mathrm{p}| \ll R$. Tranne per due sottili porzioni di carica elettrica, situate agli estremi opposti di una nanoparticella, la maggior parte della nanoparticella ha carica nulla.

| | | |
|---|---|---|
| 2.3 | Esprimi in funzione di $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$ e di $n$ le due quantità seguenti: la forza di richiamo $\boldsymbol{F}$ esercitata sulla nuvola elettronica e il lavoro $W_\mathrm{el}$ fatto sulla nuvola elettronica durante lo spostamento. | 1.0 |

## La nanoparticella d'argento immersa in un campo elettrico esterno costante

Una nanoparticella è posta nel vuoto e ad essa è applicata una forza esterna $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ generata da una campo elettrostatico omogeneo $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\boldsymbol{e}_x$, la quale sposta la nuvola elettronica di una piccola distanza $|x_\mathrm{p}|$, con $|x_\mathrm{p}| \ll R$.

| | | |
|---|---|---|
| 2.4 | Trova lo spostamento $x_p$ della nuvola elettronica in funzione di $E_0$ e $n$. Determina, in funzione di $n$, $R$ e $x_\mathrm{p}$, la quantità di carica degli elettroni $-\Delta Q$ che ha attraversato il piano $yz$, al centro della nanoparticella. | 0.6 |

## Le capacità e induttanza equivalenti di una nanoparticella d'argento

Sia nel caso di un campo $\boldsymbol{E}_0$ costante che dipendente dal tempo, si può modellizzare una nanoparticella con un circuito elettrico equivalente. La capacità equivalente si può trovare uguagliando il lavoro $W_\mathrm{el}$, fatto per separare le cariche $\Delta Q$, con l'energia di un condensatore carico con la carica $\pm\Delta Q$. La separazione delle cariche determina un voltaggio equivalente $V_0$ ai capi della capacità equivalente.

| | | |
|---|---|---|
| 2.5a | Esprimi la capacità equivalente del sistema $C$ in funzione di $\varepsilon_0$ ed R. Trova quindi il suo valore. | 0.7 |
| 2.5b | Con questa capacità, trova in funzione di $E_0$ e di R il voltaggio equivalente $V_0$ che si deve applicare alla capacità equivalente per accumulare la carica $\Delta Q$. | 0.4 |

Per un campo $\boldsymbol{E}_0$ dipendente dal tempo, la nuvola elettronica si muove con una velocità $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x$ (vedi la Fig. 2.1(d)). Essa possiede l'energica cinetica $W_{\mathrm{kin}}$ e dà origine ad una corrente elettrica $I$ che fluisce attraverso il piano $yz$ fissato. L'energia della nuvola elettronica può essere attribuita all'energia di un'induttanza $L$ equivalente in cui passa la corrente $I$.

| | | |
|---|---|---|
| 2.6a | Esprimi sia $W_{\mathrm{kin}}$ che $I$ in funzione della velocità $v$. | 0.7 |
| 2.6b | Esprimi l'induttanza equivalente L in funzione del raggio R, della carica dell'elettrone e e della sua massa $m_e$, della concentrazione di elettroni n. Calcola infine il suo valore. | 0.5 |

## La risonanza plasmonica della nanoparticella d'argento

Dall'analisi precedente, segue che il moto che si genera quando la nuvola elettronica viene spostata dalla sua posizione di equilibrio e poi viene rilasciata, può essere modellizzata da un circuito $LC$ che oscilla alla frequenza di risonanza. Questo modo di vibrazione dinamica della nuvola elettronica è detto risonanza plasmonica: la nuvola elettronica oscilla alla cosiddetta frequenza angolare plasmonica $\omega_p$.

| | | |
|---|---|---|
| 2.7a | Trova un'espressione per la frequenza angolare plasmonica $\omega_{\mathrm{p}}$ della nuvola di elettroni in funzione della carica dell'elettrone $e$ della sua massa $m_e$, della concentrazione di elettroni $n$, e della costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0$. | 0.5 |
| 2.7b | Calcola $\omega_{\mathrm{p}}$ in rad/s e la lunghezza d'onda $\lambda_{\mathrm{p}}$ (in nm) nel vuoto della luce che corrisponde a $\omega = \omega_{\mathrm{p}}$. | 0.4 |

## La nanoparticella viene illuminata con della luce alla frequenza di plasmone

Nel resto del problema, la nanoparticella è illuminata con luce monocromatica alla frequenza di plasmone $\omega_{\mathrm{p}}$ con l'intensità incidente data da $S = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = 1.00\ \mathrm{MW\,m^{-2}}$ . Dato che la lunghezza d'onda è grande, $\lambda_p \gg R$, si può ritenere che la nanoparticella sia posta in un campo elettrico omogeneo che oscilla armonicamente e dato da $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\cos(\omega_{\mathrm{p}}t)\,\boldsymbol{e}_x$. Guidato da $\boldsymbol{E}_0$, il centro $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t)$ della nuvola elettronica oscilla alla stessa frequenza con velocità $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}t$ e ampiezza costante $x_0$. Il moto oscillante degli elettroni produce assorbimento di luce. L'energia acquisita dalla particella viene in parte convertita in calore per effetto Joule all'interno della particella stessa, in parte riemessa dalla particella come luce diffusa.

Il riscaldamento per effetto Joule è dovuto a urti anelastici casuali in cui uno ione d'argento viene colpito da un elettrone libero alla volta, il quale gli cede tutta la sua energia cinetica. Essa viene convertita in vibrazione degli ioni d'argento (calore). Il tempo medio tra due collisioni consecutive è $\tau \gg 1/\omega_p$, che, per le nanoparticelle che si trattano qui, è $\tau = 5.24 \times 10^{-15}$s.

| | | |
|---|---|---|
| 2.8a | Trova un'espressione per la potenza media sviluppata nelle nanoparticelle, per effetto Jule, tra due urti consecutivi $P_{\mathrm{heat}}$ come pure la corrente quadratica media $\langle I^2 \rangle$, che includano esplicitamente la media nel tempo del quadrato della velocità $\langle v^2 \rangle$ della nuvola di elettroni. | 1.0 |
| 2.8b | Trova un'espressione per la resistenza ohmica equivalente $R_{\mathrm{heat}}$ in un modello in cui una nanoparticella è equivalente a un resistore che produce una potenza di | 1.0 |

| | | |
|---|---|---|
| | riscaldamento $P_{heat}$ dovuta alla corrente $I$ della nuvola di elettroni. Calcola il valore numerico di $R_{heat}$. | |

La luce del fascio incidente perde la potenza $P_{scat}$, mediata nel tempo, essendo diffusa dagli elettroni oscillanti della nuvola elettronica (riemissione). $P_{scat}$ dipende dall'ampiezza di oscillazione del centro diffusore $x_0$, dalla carica Q, dalla pulsazione angolare $\omega_p$ e da due proprietà della luce (la velocità della luce $c$ e la costante dielettrica del vuoto $\varepsilon_0$). In funzione di queste quattro variabili, $P_{scat}$ è data da $P_{scat} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p{}^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$.

| | | |
|---|---|---|
| 2.9 | A partire da $P_{scat}$, trova un'espressione della resistenza equivalente $R_{scat}$ (in analogia con $R_{heat}$) in un modello resistore-equivalente e calcola il suo valore numerico. | 1.0 |

Gli elementi circuitali precedenti sono montati in serie in un circuito $LCR$ che è il modello di una nanoparticella d'argento. Tale particella esegue un moto armonico semplice per effetto del voltaggio equivalente $V = V_0 cos(\omega_p t)$ dovuto al campo elettrico $E_0$ della luce incidente.

| | | |
|---|---|---|
| 2.10a | Ricava un'espressione per le potenze dissipate $P_{heat}$ e $P_{scat}$ mediate nel tempo, in cui deve comparire l'ampiezza del campo elettrico $E_0$ della luce incidente alla frequenza di risonanza plasmonica $\omega = \omega_p$. | 1.2 |
| 2.10b | Calcola il valore numerico di $E_0$, $P_{heat}$, e $P_{scat}$. | 0.3 |

## Generazione del vapore dalla luce

Si prepara una soluzione acquosa di nanoparticelle d'argento alla concentrazione di $n_{np} = 7.3 \times 10^{15} \mathrm{m}^{-3}$. Si versa la soluzione in un recipiente trasparente a forma di prisma avente le dimensioni $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0\ \mathrm{cm}^3$ e la si illumina con luce alla frequenza plasmonica con l'intensità $S = 1.00\ \mathrm{MW\ m}^{-2}$ ad incidenza normale come sopra (vedere Fig. 2.1(e)). La temperatura dell'acqua è $T_{wa} = 20^\circ\mathrm{C}$ e si assume, in buon accordo con le osservazioni sperimentali che, allo stato stazionario, tutto il riscaldamento per effetto Joule delle nanoparticelle sia impiegato per produrre del vapore alla temperatura $T_{st} = 110^\circ\mathrm{C}$, senza aumentare la temperatura dell'acqua.

Si definisce l'efficienza termodinamica del generatore di vapore $\eta$ mediante il rapporto delle potenze $\eta = P_{st}/P_{tot}$, in cui $P_{st}$ è la potenza spesa per la produzione del vapore nell'intero volume del recipiente, e $P_{tot}$ è la potenza totale della luce che entra nel recipiente.

Per la maggior parte del tempo ogni nanoparticella è circondata da vapore invece che dall'acqua e si può trattare come se fosse nel vuoto.

| | | |
|---|---|---|
| 2.11a | Calcola la massa totale di vapore prodotta ogni secondo $\mu_{st}$ dal generatore di vapore plasmonico durante l'illuminazione della luce alla frequenza plasmonica e all'intensità S. | 0.6 |
| 2.11b | Calcola il valore numerico dell'efficienza termodinamica $\eta$ del genratore di vapore a plasmoni. | 0.2 |