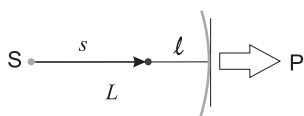




PROBLEMA n. 1 – Il fischio del treno

Quesito n. 1.

La frequenza registrata dal sensore differisce da quella emessa dalla sorgente in moto a causa dell'effetto Doppler.



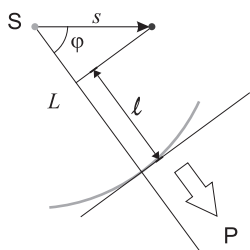
Sia $T = 1/f_0$ il periodo dell'onda sonora emessa dalla sorgente. Nel tempo T la sorgente S ha percorso un tratto $s = vT$, mentre il fronte d'onda ha percorso verso l'osservatore posto nella direzione di P un tratto $L = cT > s$. La distanza ℓ tra il fronte d'onda e quello successivo che sta per essere emesso vale $\ell = L - s = (c - v)T$ che è la lunghezza d'onda del segnale ricevuto.

Di conseguenza la frequenza registrata è

$$f = \frac{c}{\ell} = \frac{c}{(c - v)T} = \frac{f_0}{1 - v/c} > f_0.$$

La frequenza registrata al sensore è maggiore della frequenza emessa dalla sorgente.

Quesito n. 2.



Il caso generale è mostrato in figura.

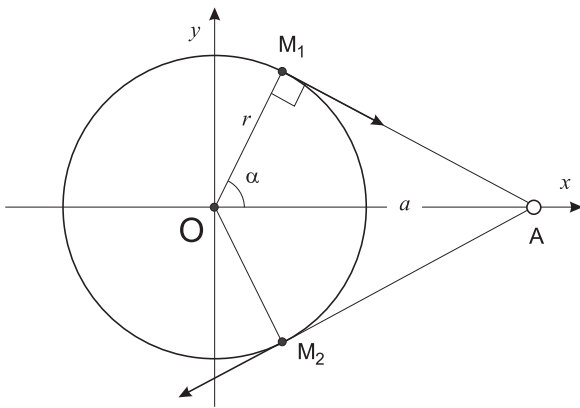
Come sopra, nel tempo T la sorgente S ha percorso un tratto $s = vT$, mentre il fronte d'onda ha percorso verso l'osservatore lontano, nella direzione di P , un tratto $L = cT$. La distanza ℓ tra il fronte d'onda e quello successivo, che sta per essere emesso dalla sorgente, è $\ell = L - s \cos \varphi = (c - v \cos \varphi)T$. Di conseguenza la frequenza registrata dipende dall'angolo φ ed è

$$f(\varphi) = \frac{c}{\ell} = \frac{c}{(c - v \cos \varphi)T} = \frac{f_0}{1 - (v/c) \cos \varphi}.$$

Se la sorgente si avvicina al sensore $\cos \varphi > 0 \Rightarrow f(\varphi) > f_0$ ed è massima per $\varphi = 0$: $f_{\max} = f(0) = f_0/(1 - v/c)$.

Se la sorgente si allontana dal sensore $\cos \varphi < 0 \Rightarrow f(\varphi) < f_0$ ed è minima per $\varphi = \pi$: $f_{\min} = f(\pi) = f_0/(1 + v/c)$.

Infine, se $\varphi = \pi/2$ (la sorgente si muove perpendicolarmente alla direzione del sensore, come anche nel caso $\varphi = 3\pi/2$) allora $f = f_0$.

**Quesito n. 3.**

In figura è mostrata la posizione del sensore A nel sistema cartesiano richiesto. Per quanto visto sopra i punti M_1 e M_2 sono quelli nei quali il treno si avvicina e, rispettivamente, si allontana dal sensore con angolo rispettivamente pari a $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$.

Nei due punti M_1 e M_2 si ha

$$\begin{cases} f(M_1) = f_{A,\max} = \frac{f_0}{1 - v/c} \\ f(M_2) = f_{A,\min} = \frac{f_0}{1 + v/c} \end{cases}$$

dove le frequenze massime e minime registrate dal sensore A, si ricavano dal grafico

$$f_{A,\max} = 1.65 \text{ kHz} \quad \text{e} \quad f_{A,\min} = 1.10 \text{ kHz}.$$

Quesito n. 4.

Risolvendo il sistema scritto sopra nelle incognite f_0 e v si ricava

$$f_0 = f_{A,\max} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = f_{A,\min} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \text{da cui} \quad \frac{v}{c} (f_{A,\max} + f_{A,\min}) = f_{A,\max} - f_{A,\min}$$

$$v = \frac{f_{A,\max} - f_{A,\min}}{f_{A,\max} + f_{A,\min}} c = \frac{1}{5} c = 68 \text{ m s}^{-1}.$$

$$\text{RISPOSTE VALIDE} \Rightarrow \boxed{68.0 \text{ m s}^{-1}, \quad 68 \text{ m s}^{-1}}$$

E infine, sostituendo v ,

$$f_0 = \frac{4}{5} f_{A,\max} = \frac{6}{5} f_{A,\min} = 1.32 \text{ kHz}.$$

$$\text{RISPOSTA VALIDA} \Rightarrow \boxed{1.32 \text{ kHz}}$$

Quesito n. 5.

Dal grafico si può ricavare il periodo del moto del treno, corrispondente al periodo delle curve registrate, $T = 36 \text{ s}$.

Avendo trovato la velocità del treno si può scrivere

$$2\pi r = vT \quad \Rightarrow \quad r = \frac{vT}{2\pi} = 389.61 \text{ m}.$$

$$\text{RISPOSTA VALIDA} \Rightarrow \boxed{390 \text{ m}}$$

Per determinare le distanze occorre ricavare il valore dell'angolo α in figura.

Sia τ il tempo che il treno impiega a percorrere il tratto M_1M_2 . Dato che i due punti sono alla stessa distanza da A, il ritardo dovuto alla propagazione del segnale è uguale e dunque τ si può ricavare direttamente dal grafico come la distanza temporale tra i punti di massimo e minimo della curva registrata e si ottiene (v. figura al quesito 3.)

$$\tau_A = 9 \text{ s} = \frac{T}{4} \quad \text{da cui} \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Da questo si ha

$$a = \frac{r}{\cos \alpha} = \sqrt{2} r = 550.99 \text{ m}$$

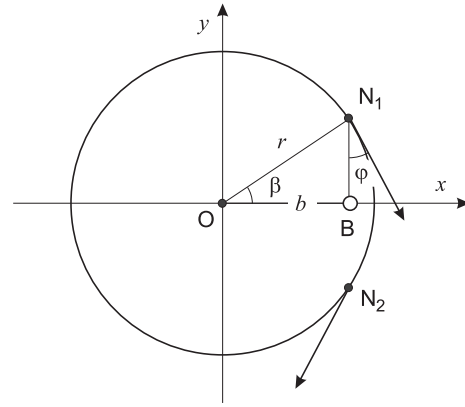
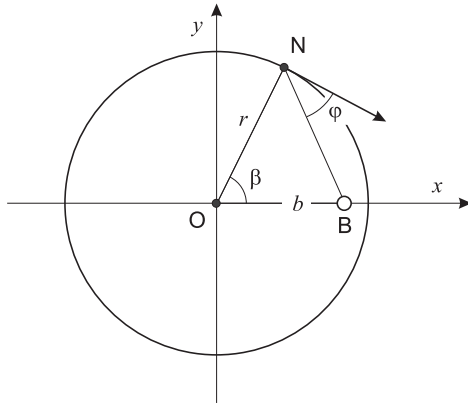
$$\text{RISPOSTA VALIDA} \Rightarrow \boxed{551 \text{ m}}$$

$$\overline{M_1A} = r \tan \alpha = r = 389.61 \text{ m}.$$

$$\text{RISPOSTA VALIDA} \Rightarrow \boxed{390 \text{ m}}$$

Quesito n. 6.

Per qualunque posizione posta all'esterno del tracciato i valori massimo e minimo della frequenza registrata sarebbero uguali a quelli visti sopra, dunque il sensore B deve essere all'interno.



Nella figura a sinistra è indicato il punto B a distanza b dal centro O e l'angolo φ in una posizione generica del treno N , individuata dall'angolo β .

Per il teorema dei seni, applicato al triangolo NOB ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{b}{r} \sin\left(\pi - \beta - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \quad \text{cioè} \quad \cos \varphi = \frac{b}{r} \cos(\beta - \varphi)$$

dalla quale si ricava che $\cos \varphi$ è massimo per $\varphi = \beta$, ovvero quando l'angolo in B è retto, come mostrato nella figura a destra; il punto corrispondente, dove si trova il treno, è N_1 .

Simmetricamente $\cos \varphi$ è minimo quando l'angolo in B è retto e il treno si trova in N_2 , simmetrico di N_1 rispetto alla retta OB .

In queste posizioni le frequenze massima e minima valgono rispettivamente

$$\begin{cases} f(N_1) = f_{B,\max} = \frac{f_0}{1 - (v/c)(b/r)} < f_{A,\max} \\ f(N_2) = f_{B,\min} = \frac{f_0}{1 + (v/c)(b/r)} > f_{A,\min} \end{cases}$$

come appare nel grafico dato.

Quesito n. 7.

Di nuovo, per la simmetria dei punti N_1 e N_2 il ritardo di propagazione del segnale è uguale nei due casi e l'angolo β si può ricavare dal grafico della curva B come fatto per quello del sensore A . Si trova ancora

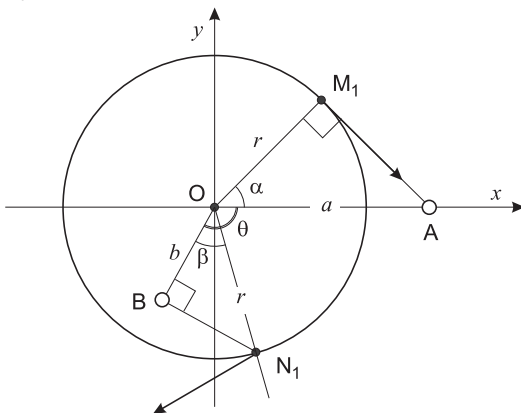
$$\tau_B = 9 \text{ s} = \frac{T}{4} \quad \text{da cui} \quad 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Ne segue

$$b = r \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} r = \frac{1}{2} a = 275.495 \text{ m} \quad \text{e} \quad \overline{N_1 B} = b$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 275 m

Quesito n. 8.



La figura mostra la situazione nel suo insieme dove, fissata la posizione di A resta da determinare quella di B , data dall'angolo \widehat{AOB} .

Essendo $\alpha = \beta$ si osserva che

$$\alpha + \widehat{AOB} = \widehat{M_1 O N_1} + \beta \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{M_1 O N_1} = \theta$$

che può essere ricavato dal grafico dato nel testo, trovando il tempo impiegato dal treno τ_T per percorrere l'arco corrispondente;

$$\tau_T = \frac{\theta r}{v} \Rightarrow \theta = \frac{v \tau_T}{r}.$$

Si deve ora osservare che τ_T non è quello ricavato direttamente come intervallo tra un massimo della curva A e il successivo massimo della curva B in quanto i ritardi dovuti alla propagazione del segnale adesso sono diversi; tuttavia avendo già trovato le distanze $\overline{M_1 A}$ e $\overline{N_1 B}$ questi sono

$$\Delta t_A = \frac{\overline{M_1 A}}{c} \quad \text{e} \quad \Delta t_B = \frac{\overline{N_1 B}}{c}.$$

Si ha quindi

$$\tau_T = \tau_{\text{mis}} + \Delta t_A - \Delta t_B \Rightarrow \theta = \frac{v}{r} (\tau_{\text{mis}} + \Delta t_A - \Delta t_B) \quad \text{dove}$$

$\tau_{\text{mis}} = 12 \text{ s} = T/3$ è quello misurato sul grafico.

$$\theta = \frac{v}{r} \left(\frac{T}{3} + \frac{r-b}{c} \right) = 2.153 \text{ rad} = 123.36^\circ.$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 123°

Infine applicando la legge del coseno al triangolo AOB

$$L = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = 739.203 \text{ m}.$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 739 m.

PROBLEMA n. 2 – Tre-in-uno

A - Condensatore Bottiglia di Leida

Quesito n. 1.

Area della superficie rilevante del vetro, cioè quella ricoperta dall'alluminio:

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r(r + 2h).$$

Per il piccolo spessore del vetro si assume che il campo elettrico tra le armature sia ovunque perpendicolare a queste e dunque la capacità è assimilabile a quella di un condensatore piano

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\pi r(r + 2h)}{d} = 1.9021 \text{ nF}.$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 1.90 nF

Quesito n. 2.

La carica massima è legata alla rigidità dielettrica del vetro

$$Q_{\text{max}} = C V_{\text{max}} = C E_{\text{max}} d = 1.1413 \times 10^{-4} \text{ C}.$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow $1.14 \times 10^{-4} \text{ C}$ $114 \mu\text{C}$

Quesito n. 3.

Dalla legge di scarica

$$Q = Q_{\text{max}} e^{-t/(RC)} \Rightarrow t = -RC \ln \frac{Q}{Q_{\text{max}}} = RC \ln \frac{Q_{\text{max}}}{Q} = RC \ln 1000 = 1.3139 \mu\text{s}.$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 1.31 μs

B - Volo di una carica puntiforme

Quesito n. 1.

Il campo tra le due sfere è il campo centrale di una carica puntiforme, per cui il potenziale, in funzione della distanza dal centro r , è

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{A}{r}$$

dove Q è la carica sull'anodo e A è una costante da determinare. Poiché

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = A \frac{b-a}{ab} \Rightarrow A = \frac{ab}{b-a} \Delta V \quad \text{per cui}$$

$$V(r) = \frac{ab}{b-a} \frac{\Delta V}{r}.$$

Per la conservazione dell'energia, quando la particella è a distanza r

$$\frac{1}{2} m v^2(r) + q V(r) = q V(a) \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2(r) = \frac{ab}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) q \Delta V = q \Delta V \frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$$

da cui

$$v(r) = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m} \frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a}{r} \right)} = v_0 \sqrt{1 - \frac{a}{r}} \quad \text{con} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2k b \Delta V}{b-a}}, \quad k = \frac{q}{m}.$$

Utilizzando la condizione $b \gg a$ si ha che

$$v_0 \rightarrow \sqrt{2k \Delta V}.$$

Quesito n. 2.

$$v = \frac{dr}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dr}{v} = \frac{dr}{v_0 \sqrt{1 - \frac{a}{r}}}.$$

Utilizzando l'integrale dato nel testo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - a/x}} = \sqrt{x(x-a)} + a \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-a}) + c$$

con $x = r$ e $r > a$, si trova

$$T = \frac{1}{v_0} \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{1 - a/r}} = \frac{1}{v_0} \left[\sqrt{r(r-a)} + a \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r-a}) \right] \Big|_a^b = \frac{1}{v_0} \left[\sqrt{b(b-a)} + a \ln \frac{\sqrt{b} + \sqrt{b-a}}{\sqrt{a}} \right].$$

Sostituendo i dati numerici, si ha

$$T = 0.3224 \text{ ms}$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 0.322 ms

Utilizzando di nuovo la condizione $b \gg a$ si trova infine

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{2k \Delta V}} \left[b + a \ln \left(2\sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right], \quad \text{da cui}$$

$$T = 0.3257 \text{ ms}.$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 0.326 ms

C - Correnti indotte in anello che cade

Quesito n. 1.

Tra le infinite superfici che hanno come contorno l'anello si sceglie quella piana. Il vettore area \vec{A} associato a questa superficie ha modulo $A = \pi R^2$ e direzione ortogonale al piano dell'anello; poiché è richiesto il modulo della f.e.m., non ha importanza la scelta del verso ma, per comodità, si supponga che, quando l'anello ha ruotato di un angolo θ , anche l'angolo tra \vec{B} e \vec{A} sia θ . Il flusso magnetico concatenato con l'anello è quindi

$$\Phi_\gamma(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{A} = \pi R^2 B \cos \theta(t).$$

In modulo, la f.e.m. indotta è allora

$$|\mathcal{E}_I| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \pi R^2 B \left| \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \right| = \pi R^2 B \omega \sin \theta(t) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Occorre adesso determinare la velocità angolare ω in funzione di θ e per questo si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica, avendo fatto l'ipotesi che gli effetti della corrente indotta siano trascurabili.

In assenza di attrito, durante la caduta l'energia potenziale viene convertita in energia cinetica rotazionale. Quando l'anello è caduto di un angolo θ , esso ha raggiunto una velocità angolare ω data dalla equazione

$$MgR = MgR \cos \theta + \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = MgR(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Per il teorema di Huygens-Steiner (detto anche teorema degli assi paralleli), il momento d'inerzia I di un corpo rigido rispetto a un asse è

$$I = I_b + Md^2$$

dove I_b è il momento d'inerzia calcolato rispetto a un asse passante per il baricentro del corpo, parallelo all'asse dato, e d la distanza tra i due assi paralleli. In questo caso dunque

$$I = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2.$$

Utilizzando questa espressione nella (1) si ottiene

$$\omega^2 = \frac{4g(1 - \cos \theta)}{3R} \Rightarrow \omega(\theta) = \sqrt{\frac{4g(1 - \cos \theta)}{3R}}$$

e il modulo della f.e.m. indotta risulta

$$|\mathcal{E}_I| = \pi R^2 B \omega \sin \theta = \pi R^2 B \sin \theta \sqrt{\frac{4g(1 - \cos \theta)}{3R}}.$$

Quesito n. 2.

La corrente richiesta è $I = \mathcal{E}_I/r$, dove la resistenza r è data da $r = \rho(2\pi R/S)$.

Per trovare il valore massimo di I in funzione di θ occorre trovare il massimo della funzione $f(\theta) = \omega(\theta) \sin \theta$ per θ tra 0 e 90° . Per questo è sufficiente notare che entrambi i fattori, in questo intervallo, sono crescenti con θ , per cui il massimo si avrà per $\theta = 90^\circ$, cioè quando l'anello urta contro il pavimento orizzontale.

Se non si fa questa osservazione, la funzione da studiare, a meno di fattori costanti, è

$$f(\theta) = \sin \theta \sqrt{\frac{4g(1 - \cos \theta)}{3R}} = \sqrt{\frac{4g(1 - \cos^2 \theta)(1 - \cos \theta)}{3R}}.$$

Ovviamente il massimo di questa funzione coincide con il massimo di $(1 - \cos^2 \theta)(1 - \cos \theta)$.

Ponendo $\cos \theta = x$, questo equivale a cercare il massimo della funzione $y(x) = (1 - x^2)(1 - x) = 1 - x - x^2 + x^3$ nell'intervallo tra 0 e 1. Calcolando la derivata prima e seconda

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x - 1; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2$$

si trova che la prima ha radici $-1/3$ e 1; queste corrispondono rispettivamente a un massimo e un minimo relativi della funzione. La $y(x)$ è sempre decrescente nell'intervallo tra 0 e 1, dunque il massimo si avrà per $x = 0$, che corrisponde a $\theta = 90^\circ$, come sopra.

Infine, operando le necessarie sostituzioni, si trova

$$I = \frac{SB \sqrt{gR/3}}{\rho} = 31.961 \text{ mA}.$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 32.0 mA

Quesito n. 3.

Confronto dei momenti meccanici dovuti all'interazione magnetica con la corrente indotta e a quella gravitazionale; i valori massimi si hanno quando l'anello raggiunge il suolo.

$$\mathcal{M}_g = mgR = 2\pi \delta(RS) g R = 2\pi R^2 \delta S g \quad \mathcal{M}_m = \mu B = \pi R^2 IB$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\mathcal{M}_m}{\mathcal{M}_g} = \frac{\pi R^2 IB}{2\pi R^2 \delta S g} = \frac{IB}{2\delta S g} = 1.0379 \times 10^{-7}.$$

RISPOSTA VALIDA \Rightarrow 1.04×10^{-7}

Pertanto il momento torcente dovuto al campo magnetico è effettivamente trascurabile.

PROBLEMA n. 3 – Oscillazioni di un fluido
Quesito n. 1.

Per la legge di Stevino, si ha

$$p = p_0 + \rho gh.$$

dove p_0 è la pressione atmosferica.

Quesito n. 2.

La condizione di equilibrio, ovvero l'uguaglianza delle pressioni relative ai singoli bracci, è

$$p_1 + \rho g(h - z_0) = p_0 + \rho g(h + z_0),$$

da cui si ricava

$$z_0 = \frac{p_1 - p_0}{2\rho g}.$$

Quesito n. 3.

L'energia potenziale del sistema può essere espressa come $E_{\text{pot}} = mgz_{\text{CdM}}$, dove $m = \rho AL$ è la massa del fluido e z_{CdM} rappresenta la quota del centro di massa rispetto alla parte più bassa del tubo.

Per la definizione di centro di massa, quest'ultima vale

$$z_{\text{CdM}} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} (h - z_0)(h - z_0)\rho A + \frac{1}{2} (h + z_0)(h + z_0)\rho A \right).$$

Infatti, scegliendo lo zero dell'energia potenziale sul tratto orizzontale, quest'ultimo si può ignorare. Le masse di fluido contenute nel braccio sinistro e destro sono, rispettivamente, $\rho A(h - z_0)$ e $\rho A(h + z_0)$, e i loro centri di massa si trovano a metà della loro altezza, ossia a quota $\frac{1}{2}(h - z_0)$ e $\frac{1}{2}(h + z_0)$.

Sviluppando i prodotti all'interno della parentesi, si ottiene

$$z_{\text{CdM}} = \frac{1}{\rho AL} \left[\frac{1}{2} \rho A(h^2 - 2hz_0 + z_0^2) + \frac{1}{2} \rho A(h^2 + 2hz_0 + z_0^2) \right] = \frac{1}{2L} (2h^2 + 2z_0^2) = \frac{h^2 + z_0^2}{L}.$$

Segue che

$$E_{\text{pot}} = \rho Ag(h^2 + z_0^2).$$

Quesito n. 4.

In assenza di fenomeni dissipativi (si è supposto che il fluido non sia viscoso e che non si verifichi alcun tipo di turbolenza al suo interno), si usa la conservazione dell'energia meccanica del sistema

$$E = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \rho Ag(h^2 + z^2);$$

derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$0 = m \dot{z} \ddot{z} + 2\rho Ag z \dot{z} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 = 2 \frac{\rho Ag}{m} = 2 \frac{\rho Ag}{\rho AL} = \frac{2g}{L}$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico. Imponendo che $z|_{t=0} = z_0$, si ottiene

$$z(t) = z_0 \cos \omega t = z_0 \cos \left(\sqrt{2g/L} t \right).$$

Un modo alternativo è quello di usare la seconda legge della dinamica applicata all'intero fluido (tutti gli elementi del fluido, ad ogni istante, si muovono con la stessa velocità e accelerazione in modulo), dove la forza di richiamo è data dalla differenza di peso delle due sezioni verticali del tubo, pari al peso di un cilindretto di altezza $2z(t)$; assumendo come positivo il verso di spostamento del fluido da sinistra a destra, si ha

$$F(z) = [p_0 + \rho g A(h - z)] - [p_0 + \rho g A(h + z)] = -2\rho g A z \quad \text{da cui}$$

$$m\ddot{z} = -2\rho g A z(t), \quad \text{dove } m = \rho A L \text{ è la massa del fluido.}$$

Quesito n. 5.

Premessa generale, valida da ora fino alla fine del problema.

Come detto nel testo, in questo scenario dinamico non è possibile usare la legge di Stevino e neppure l'equazione di Bernoulli in quanto manca l'ipotesi di stazionarietà.

Questa equazione dovrebbe essere sostituita dalla sua generalizzazione, valida per flussi non-stazionari, che si scrive

$$\rho \int_{s_0}^s \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} + p(\vec{r}) + \frac{1}{2} \rho v^2(\vec{r}) + \rho g h(\vec{r}) = \text{costante},$$

analoga a $\vec{F} = m\vec{a}$, dove il primo termine rappresenta l'accelerazione e \vec{r} identifica la posizione di un elemento di fluido.

L'analisi è divisa in tre casi, in base ai tre tratti rettilinei del tubo così definiti

$$A: \quad s \in [0; h - z]$$

$$B: \quad s \in [h - z; L - h - z]$$

$$C: \quad s \in [L - h - z; L].$$

Per ciascun tratto si applica la seconda legge della dinamica a un cilindretto infinitesimo di massa $dm = \rho A ds$.

$$A: \Rightarrow A[p_z(s) - p_z(s + ds)] + dm g = dm \ddot{z},$$

$$B: \Rightarrow A[p_z(s) - p_z(s + ds)] = dm \ddot{z},$$

$$C: \Rightarrow A[p_z(s) - p_z(s + ds)] - dm g = dm \ddot{z},$$

dove $\ddot{z} = -(2g/L)z$ è l'accelerazione trovata risolvendo il punto precedente, dato che tutte le parti del fluido si muovono con la stessa velocità, e quindi con la stessa accelerazione, in modulo. Facendo le dovute sostituzioni e semplificazioni, si ottiene

$$\begin{cases} A: \Rightarrow -A dp_z + \rho A g ds = -\frac{2g}{L} z \rho A ds \\ B: \Rightarrow -A dp_z = -\frac{2g}{L} z \rho A ds \\ C: \Rightarrow -A dp_z - \rho A g ds = -\frac{2g}{L} z \rho A ds \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \frac{dp_z(s)}{ds} = \begin{cases} A: \quad \rho g \left(\frac{2z}{L} + 1 \right), \\ B: \quad \rho g \frac{2z}{L}, \\ C: \quad \rho g \left(\frac{2z}{L} - 1 \right). \end{cases}$$

Integrando, si ha

$$p_z(s) = \begin{cases} A: \quad \rho g \left(\frac{2z}{L} + 1 \right) s + c_1 \\ B: \quad \rho g \left(\frac{2z}{L} \right) s + c_2 \\ C: \quad \rho g \left(\frac{2z}{L} - 1 \right) s + c_3. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Le costanti } c_1, c_2 \text{ e } c_3 \text{ si ottengono imponendo le condizioni di} \\ \text{raccordo con l'atmosfera } (p|_{s=0} = p_0) \text{ e di continuità nei due} \\ \text{punti curvi.} \end{array}$$

La costante c_1 si determina imponendo la condizione al contorno con l'atmosfera all'imboccatura del tubo

$$p_z(0) = c_1 = p_0.$$

La costante c_2 si ricava imponendo la continuità della pressione nel primo raccordo, situato in $s = h - z$. Uguagliando le espressioni dei tratti (A) e (B) in quel punto

$$\rho g \left(\frac{2z}{L} + 1 \right) (h - z) + p_0 = \rho g \left(\frac{2z}{L} \right) (h - z) + c_2 \quad \text{da cui} \quad c_2 = p_0 + \rho g(h - z).$$

La costante c_3 si calcola allo stesso modo imponendo la continuità nel secondo raccordo, in $s = L - h - z$, tra i tratti (B) e (C)

$$\rho g \left(\frac{2z}{L} \right) (L - h - z) + c_2 = \rho g \left(\frac{2z}{L} - 1 \right) (L - h - z) + c_3.$$

Sostituendo il valore di c_2 appena trovato ed elidendo i termini comuni contenenti $\frac{2z}{L}$, si ha

$$\rho g(h - z) + p_0 = -\rho g(L - h - z) + c_3 \quad \text{da cui} \quad c_3 = p_0 + \rho g(L - 2z).$$

Alla fine, si ottiene

$$p_z(s) = \begin{cases} \text{A : } p_0 + \rho g \left(\frac{2z}{L} + 1 \right) s = & \rho g \frac{L + 2z}{L} s + p_0 \\ \text{B : } p_0 + \rho g \left(\frac{2z}{L} s + h - z \right) = & \rho g \frac{2z}{L} s + \rho g(h - z) + p_0 \\ \text{C : } p_0 + \rho g \left(\frac{2z}{L} - 1 \right) (s - L) = & -\rho g \frac{L - 2z}{L} s + \rho g(L - 2z) + p_0 \end{cases}.$$

Nota: si può osservare che la soluzione trovata non rispetta la legge di Stevino: per esempio, nella parte più in basso del tubo, la pressione avrebbe dovuto essere uniforme in ogni punto.

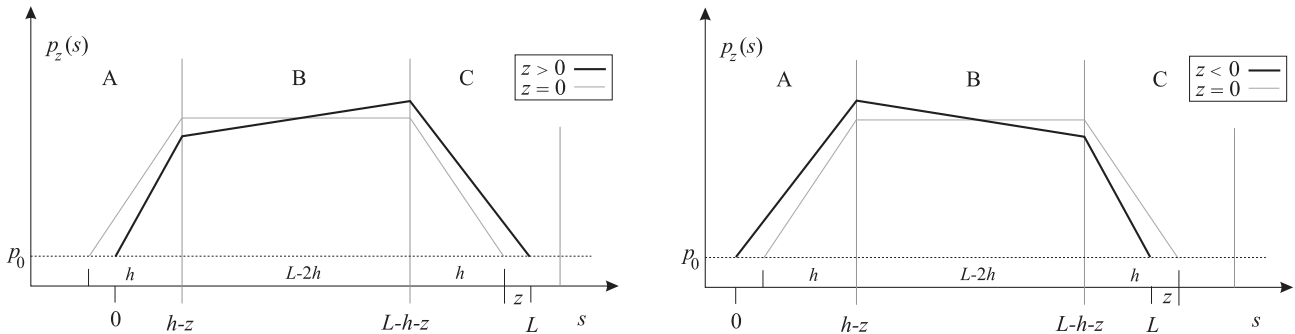
Quesito n. 6.

Nel caso $z > 0$ si trova che $p_z(s)$ è una funzione monotona crescente di s nei primi due tratti, mentre è monotona decrescente nel terzo tratto, come mostrato in figura a sinistra. Quindi, il punto a pressione maggiore è lo *spigolo* di destra ($s = L - (h + z)$), in cui

$$p = p_0 + \rho g \left(1 - \frac{2z}{L} \right) (h + z) = \rho g \frac{L - 2z}{L} (h + z) + p_0.$$

Invece, nel caso $z < 0$ si ha che $p_z(s)$ è una funzione monotona crescente di s nel primo tratto, mentre è monotona decrescente nel secondo e nel terzo tratto, come mostrato in figura a destra. Dunque, il punto a pressione massima è lo *spigolo* di sinistra ($s = h - z$), in cui

$$p = p_0 + \rho g \left(1 + \frac{2z}{L} \right) (h - z) = \rho g \frac{L + 2z}{L} (h - z) + p_0.$$



Nelle figure la linea grigia dà la situazione della pressione in condizioni di equilibrio.

Quesito n. 7.

Riprendendo l'equazione di moto trovata nel Q4

$$m\ddot{z} = -2A\rho g z(t),$$

si deve aggiungere il contributo dovuto alle forze viscose, $F_v = 8\pi\mu L\langle v \rangle$, dove $\langle v \rangle$ è la media del profilo di velocità calcolata lungo la sezione trasversale, che può essere identificata con \dot{z} .

L'equazione del moto è, dunque,

$$m\ddot{z} = -2A\rho g z - 8\pi\mu L \dot{z} \Rightarrow \rho AL \ddot{z} + 8\pi\mu L \dot{z} + 2A\rho g z = 0.$$

Dalla forma generale della soluzione fornita nel testo [$z(t) = z_0 \cos \omega t e^{-t/\tau}$], derivando due volte rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{z}(t) = -z_0 \omega \sin(\omega t) e^{-t/\tau} - \frac{z_0}{\tau} \cos(\omega t) e^{-t/\tau}$$

$$\ddot{z}(t) = -z_0 \omega^2 \cos(\omega t) e^{-t/\tau} + \frac{z_0 \omega}{\tau} \sin(\omega t) e^{-t/\tau} + \frac{z_0 \omega}{\tau} \sin(\omega t) e^{-t/\tau} + \frac{z_0}{\tau^2} \cos(\omega t) e^{-t/\tau}.$$

Sostituendo nell'equazione di moto e semplificando si ha

$$\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{2g}{L} - \omega^2 - \frac{8\pi\mu}{\rho A\tau}\right) \cos(\omega t) + \omega \left(\frac{2}{\tau} - \frac{8\pi\mu}{\rho A}\right) \sin(\omega t) = 0 \quad (\text{per qualunque } t).$$

Bisogna quindi imporre che i coefficienti che moltiplicano le due funzioni siano nulli. Dal coefficiente della funzione seno si ottiene

$$\frac{2}{\tau} - \frac{8\pi\mu}{\rho A} \Rightarrow \tau = \frac{\rho A}{4\pi\mu}.$$

Sostituendo τ nel coefficiente della funzione coseno si trova

$$\frac{1}{\tau^2} + \frac{2g}{L} - \omega^2 - \frac{8\pi\mu}{\rho A\tau} = \left(\frac{4\pi\mu}{\rho A}\right)^2 + \frac{2g}{L} - \omega^2 - \frac{8\pi\mu}{\rho A} \frac{4\pi\mu}{\rho A} = \frac{2g}{L} - \omega^2 - \left(\frac{4\pi\mu}{\rho A}\right)^2 = 0$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L} - \left(\frac{4\pi\mu}{\rho A}\right)^2}.$$

Nota: Qui bisogna supporre che il radicando sia positivo. Questa cosa è implicitamente detta nella richiesta, dato che si parla di oscillazioni smorzate. I casi in cui il radicando è minore o uguale a zero, detti sovra-smorzati, non oscillano affatto, decadono e basta.

————— • —————



*Ministero dell'Istruzione
e del Merito*

I Campionati di Fisica
sono organizzati dall'AIF;
sono finanziati e inseriti dal MIM
nel Programma annuale per la
valorizzazione delle eccellenze.



Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIFIS

Segreteria dei Campionati Italiani di Fisica

E-mail: segreteria@olifis.it - WEB: www.olifis.it



NOTA BENE:

È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire,
comunicare al pubblico questo materiale
alle due seguenti condizioni:
citare la fonte;

non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.

Con il supporto di

CASIO
www.casio-edu.it