Semiciconferenze e resistenza - Proposta Trieste 2018

Andrea Caleo

December 10, 2017

1 Semicirconferenze e resistenza (totale: 6.0 punti)

La figura 1 rappresenta un circuito in cui due punti A e B sono connessi tramite una serie di cavi. Tutti i cavi sono fatti di rame, che ha resistivitá $\rho = 1.68 \times 10^{-8}$ ohm m, e hanno sezione $S = 0.1$ cm^2.

I cavi formano una griglia infinita di semicirconferenze. La distanza tra due punti contigui sulla retta in cui giacciono A e B é sempre $L = 1$ m. A e B non sono direttamente collegati se non tramite le semicirconferenze.

1. La griglia puó essere rappresentata in modo semplificato come in figura 2. Determina il valore di R e quello di α affinché tale rappresentazione sia corretta.
2. Con riferimento alla figura 2, si indichi con $\overline{R}$ la resistenza equivalente tra i punti A e B. Si indichi con R_1 la resistenza equivalente tra i punti P_1 e B. Si esprima $\overline{R}$ in termini di R e R_1.
3. Si indichi con R_n la resistenza equivalente tra il punto P_n e B *senza considerare le resistenze alla sinistra di P_n*. Si esprima R_{n+1} in funzione di R e R_n .
4. Per n molto grande, R_n e R_{n+1} diventano quasi uguali, e molto pi˘ grandi di R. Si ponga $R_n = R_{n+1}$ nella formula appena ricavata e si ricavi un valore approssimato di R_n in funzione di R e n. Si usi questa formula per ricavare il valore numerico di R_{10}.
5. Si determini $\overline{R}$ in funzione di R, ed il suo valore numerico.
6. Si applica una differenza di potenziale $V = 1.0 \times 10^{-3}$ V tra i punti A e B. Qual e' il valore dell'intensitá di corrente che scorre nella prima semicirconferenza?

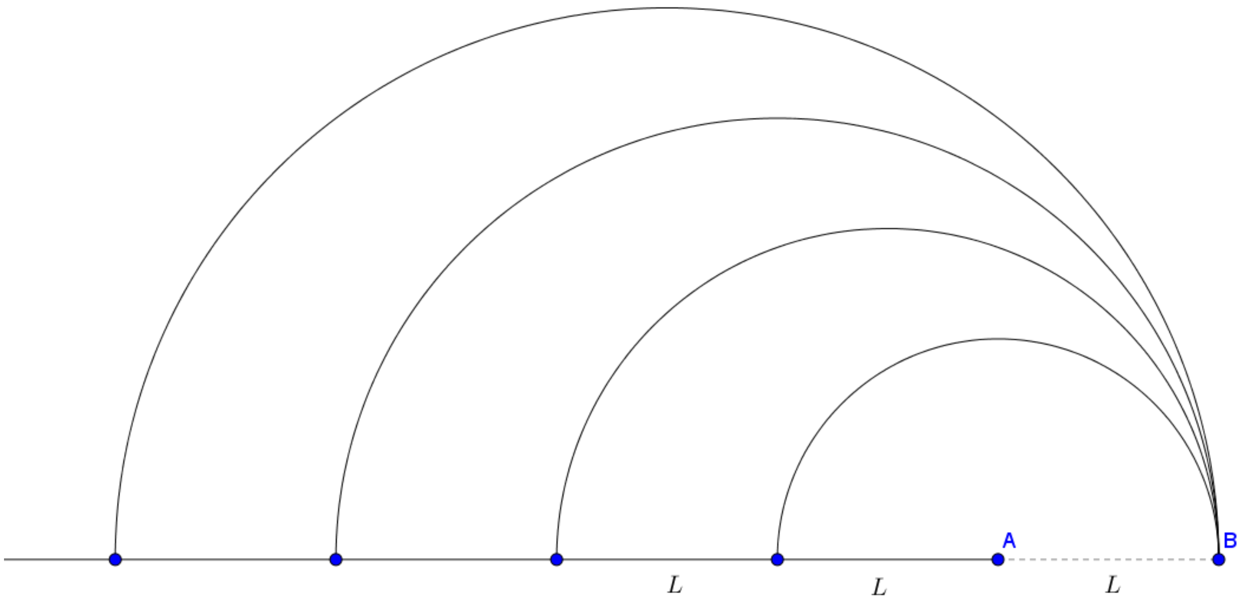

Figure 1: Griglia infinita di cavi .

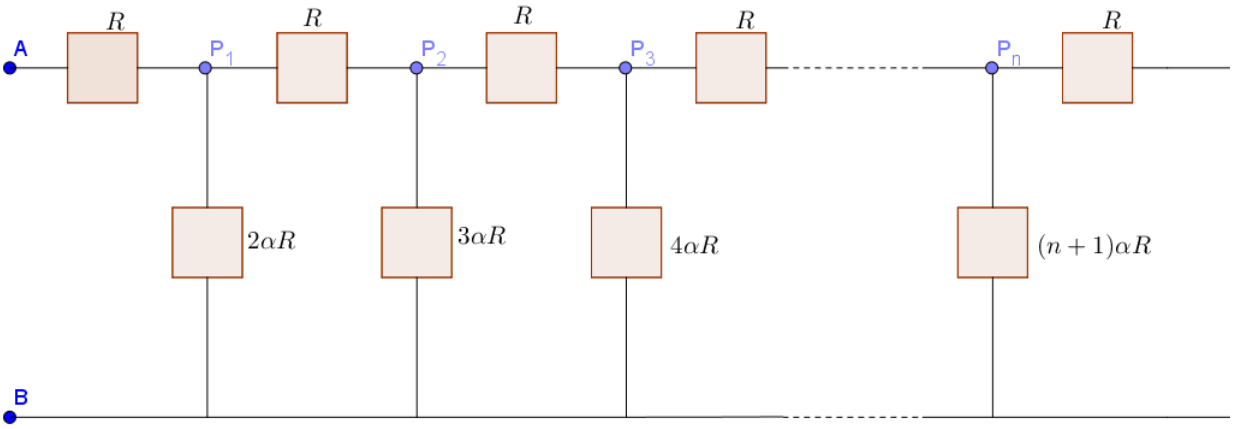

Figure 2: Rappresentazione alternativa della griglia di cavi.

2 Semiconferenze e resistenza: soluzione

1. $R = \rho L/S = 1.68 \times 10^{-3}$ ohm. $\alpha = \pi/2$.

2. $\overline{R} = R + R_1$.

3. R_n é data dal parallelo tra $(n+1)\alpha R$ e R_{n+1}:

$$R_n = (\frac{1}{(n+1)\frac{\pi}{2}R} + \frac{1}{R + R_{n+1}})^{-1}. \tag{1}$$

4. Sostituendo e svolgendo i conti si trova:

$$R_n \approx R(\sqrt{(n+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{(n+1)\frac{\pi}{2}}}). \tag{2}$$

   Sostituendo i valori numerici si trova $R_{10} \approx 3.69R \approx 6.20 \times 10^{-3}\ \Omega$.

5. Si usa l'equazione (1) per trovare:

n	R_n/R
9	3.61
8	3.48
7	3.30
6	3.09
5	2.85
4	2.58
3	2.28
2	1.93
1	1.52

   E infine $\overline{R} = R + R_1 \approx 2.52R_1 \approx 4.23 \times 10^{-3}\ \Omega$.

6. La corrente totale che scorre tra A e B é $I_0 = V/\overline{R}$. Si indichi con i_1 la corrente richiesta dal problema. Applicando le leggi dei circuiti si ha: $I_0 \times R + i_1 \times \pi R = V$, da cui:

$$i_1 = \frac{1}{\pi}\frac{V}{R}\Big(1 - \frac{R}{\overline{R}}\Big) \approx 0.11\text{mA}. \tag{3}$$