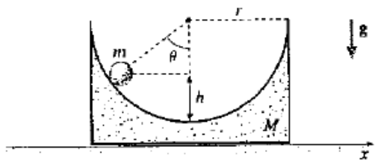
5-42 Una conca semisferica di raggio r e massa M può scorrere sopra un piano orizzontale liscio; un corpo di massa $m = \gamma M$ viene posato all'interno della conca, come indicato in figura, ad altezza h_0 rispetto al punto più basso e lasciato libero di scivolare con velocità iniziale nulla; l'attrito incontrato dal corpo è trascurabile. Si determini, rispetto a un sistema di riferimento solidale a terra,



PROBLEMA 5-42

a) gli spostamenti S e s subiti rispettivamente dalla conca e dal corpo quando quest'ultimo si ferma sull'altro versante della conca,

b) il modulo V della velocità della conca quando il corpo passa ad altezza $h = h_0/2$ rispetto al punto più basso della conca.

c) Si calcoli il periodo T delle piccole oscillazioni del sistema nel caso $h_0 \ll r$.

a) Il piano orizzontale di appoggio del sistema è privo di attrito e sviluppa una reazione verticale; anche l'altra forza esterna agente sul sistema, cioè il peso, è verticale, di conseguenza

 ISBN 88-408-0924-4

la risultante delle forze esterne ha componente nulla secondo il piano. Poiché inizialmente il centro di massa del sistema è fermo, l'ascissa x_G della sua posizione non cambia al passare del tempo. Dalla condizione $\Delta x_G = 0$, riferita alle posizioni iniziale e finale considerate nella domanda, segue

$$M\Delta X + m\Delta x = 0\,.$$

Il corpo si ferma sull'altro versante della conca nella posizione simmetrica, cioè posta anch'essa ad altezza h_0, e lo spostamento del corpo relativo alla conca ha componente x data da

$$\Delta x - \Delta X = 2\sqrt{2rh_0 - h_0^2}\,.$$

Dalle due equazioni sopra scritte si ricava

$$S = |\Delta X| = \frac{2\gamma\sqrt{(2r - h_0)h_0}}{1+\gamma}\,, \qquad s = \Delta x = \frac{2\sqrt{(2r - h_0)h_0}}{1+\gamma}\,.$$

b) Poiché $F_x^{(E)} = 0$, la componente x della quantità di moto totale del sistema resta nulla tale essendo inizialmente, cioè

$$MV + mv_x = 0\,, \tag{1}$$

V e v_x indicando le componenti delle velocità secondo l'asse x. Inoltre, vale la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}mgh_0\,. \tag{2}$$

Rispetto alla conca il corpo si muove di moto circolare: ciò implica che la velocità relativa del corpo, $\mathbf{v}_R \equiv (v_x - V, v_y)$, è tangente alla conca e soddisfa quindi la relazione

$$v_y = (v_x - V)\tan\theta\,,$$

dove θ è l'angolo che individua la posizione del corpo all'interno della conca (v. figura). Da quest'ultima relazione, unita alle equazioni (1) e (2), si ottiene

$$V^2\left[M + \frac{M^2}{m} + \frac{(m+M)^2}{m}\tan^2\theta\right] = mgh_0\,,$$

dove

$$\tan^2\theta = \frac{(2r - h_0)h_0}{(r - h_0)^2}\,.$$

In conclusione, risulta

$$V = \gamma\sqrt{\frac{gh_0}{(1+\gamma)[1 + (1+\gamma)\tan^2\theta]}}\,.$$

c) Si indichi con $\mathbf{A}$ l'accelerazione della conca e con $\mathbf{a}_R$ l'accelerazione del corpo relativa alla conca. La condizione $F_x^{(E)} = 0$ implica

$$MA + m(a_{Rx} + A) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{\gamma}{1+\gamma}a_{Rx} = -\frac{\gamma}{1+\gamma}a_R\cos\theta\,.$$

Si consideri un sistema di riferimento solidale alla conca; sopra il corpo agisce anche la forza apparente $-m\mathbf{A}$, e l'equazione di moto lungo la traiettoria è

$$m a_R = -mg \operatorname{sen}\theta - mA\cos\theta\,,$$

$$a_R\left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\cos^2\theta\right) = -g\operatorname{sen}\theta\,.$$

Nel caso di piccole oscillazioni si può porre $\cos\theta \approx 1$ e $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e, poiché $a_R = r\, d^2\theta/dt^2$, si ottiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(1+\gamma)\frac{g\theta}{r}\,,$$

e il periodo risulta

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{(1+\gamma)g}}\,.$$

Per il punto c): fermo restando che l'eq, del moto lungo la traiettoria ($m\, a_{R,t} = -\, g\sin\theta - mA\cos\theta$) mi sembra indubitabilmente corretta resta il dubbio di quale sia la relazione corretta fra A e $a_{R,t}$

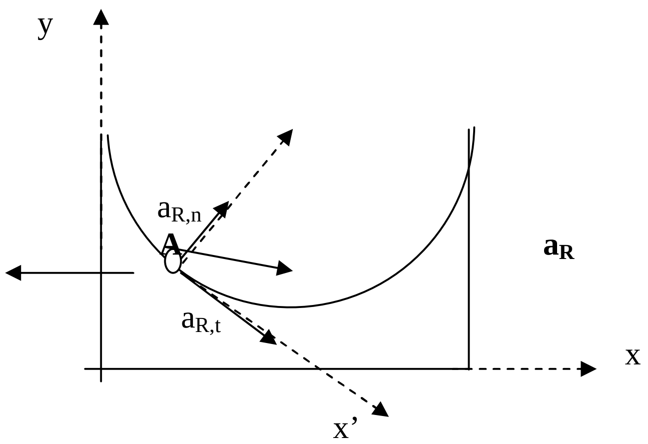
Sembrerebbe corretto scrivere:

$\Sigma F_x^{ext} = 0$ $\quad MA + m\, a_{A,x} = 0$ $\quad$ dove $a_{A,x}$ è la componente lungo x dell'acc. assoluta di m

Ora si dovrebbe avere da $\mathbf{a_A} = \mathbf{a_R} + \mathbf{a_T}$

$a_{A,x} = a_{R,x} + a_{T,x}$ $\quad$ dove $a_{T,x}$ è l'acc. di trascinamento lungo x cioè A

Rimane la "questio" di valutare $a_{R,x}$ essa dovrebbe essere data dal contributo lungo x sia dell'acc. tangenziale che dell'acc. normale, dunque $a_{R,x} = a_{R,t,x} + a_{R,n,x}$



dove $a_{R,t} = R\ d^2\theta/dt^2$

$a_{R,n} = v^2/R$

dunque: $a_{A,x}\ a_{R,t,x} + a_{R,n,x} + A$

$MA + m\, a_{A,x} = 0$

$MA + m\, a_{A,x} = 0$

$MA + m\,(a_{R,t} + a_{R,n} + A) = 0$ $\quad$ da cui $A = -\,(m/(M+m))\,(a_{R,t} + a_{R,n})$ $\quad m/(M+m) = \gamma/(1+\gamma)$

Per comodità scrivo $k = m/(M+m)$ $\quad A = -\,k\,(a_{R,t} + a_{R,n})$

E allora l'eq. del moto diverrebbe: $\quad m\, a_{R,t} = -\, g\sin\theta - m\,(-\,k\,(a_{R,t} + a_{R,n}))\cos\theta = 0$

$a_{R,t} - k\ a_{R,t}\cos\theta - k\ a_{R,n}\cos\theta = -\,g\sin\theta$

$a_{R,t}\,(1 - k\cos\theta) - k\ a_{R,n}\cos\theta = -\,g\sin\theta$

$R\ d^2\theta/dt^2 - k\,(v^2/R)\cos\theta = -\,g\sin\theta$ $\quad$ dove v è funzione di θ!

Per $\cos\theta \approx 1$ e $\sin\theta \approx \theta$

$d^2\theta/dt^2 - k\,(v^2/R^2) = -\,(g/R)\,\theta$

Scrivendo $v = R\, d\theta/dt$ di ha $\quad d^2\theta/dt^2 - k\,(d\theta/dt)^2 = -\,(g/R)\,\theta$

non da più l'eq. di un moto armonico!