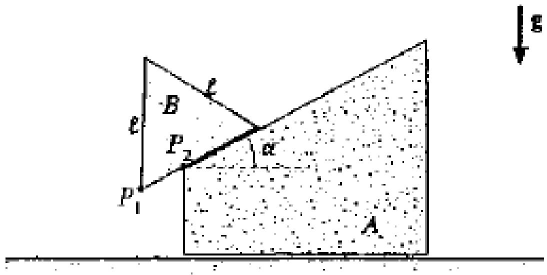
**5-40** La figura riproduce una sezione verticale di un sistema formato da un blocco omogeneo $B$ posato su un blocco $A$ che, a sua volta, poggia su un piano orizzontale; la sezione verticale di $B$ è un triangolo equilatero di lato $l = 21\,\text{cm}$, le masse dei blocchi sono $m_A = 4\,\text{kg}$ e $m_B = \gamma m_A$, con $\gamma = 0.25$, inoltre è $\alpha = \pi/6\,\text{rad}$.




PROBLEMA 5-40

*a*) Si determini il valore massimo della distanza $P_1P_2$ e il valore minimo del coefficiente di attrito statico, affinché la posizione di figura sia di equilibrio.

All'istante $t = 0$, mentre il blocco $A$ è in condizioni di equilibrio, si imprime a $B$ una velocità $v_0$: il blocco $B$ sale verso l'alto scivolando sopra $A$ e, prima di fermarsi rispetto a questo, si sposta sopra esso di un tratto $d = 20\,\text{cm}$. Si determini $v_0$ nei casi seguenti:

*b*) $A$ è bloccato e tra $A$ e $B$ non c'è attrito;

*c*) $A$ è bloccato e tra $A$ e $B$ c'è attrito con coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0.2$;

*d*) $A$ può scorrere senza attrito sul piano orizzontale e tra $A$ e $B$ non c'è attrito;

*e*) $A$ può scorrere senza attrito sul piano orizzontale e tra $A$ e $B$ c'è attrito con $\mu_D = 0.2$.

**5-40** *a*) $(\overline{P_1P_2})_{\max} = \dfrac{l}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha\right) = 7\,\text{cm}, \qquad (\mu_S)_{\min} = \tan\alpha = 0.577;$

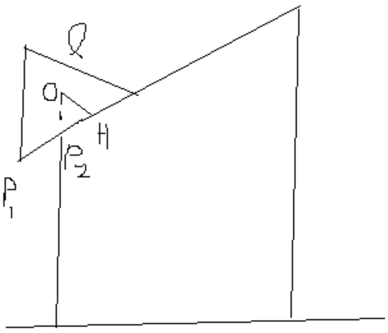
*b*) $v_0 = \sqrt{2gd\,\text{sen}\,\alpha} = 1.40\,\text{m/s};$

*c*) $v_0 = \sqrt{2gd(\text{sen}\,\alpha + \mu_D\cos\alpha)} = 1.63\,\text{m/s};$

*d*) $$v_0 = \sqrt{\frac{2(1+\gamma)gd\,\text{sen}\,\alpha}{1+\gamma\,\text{sen}^2\alpha}} = 1.52\,\text{m/s};$$

*e*) $$v_0 = \sqrt{\frac{2(1+\gamma)gd(\text{sen}\,\alpha + \mu_D\cos\alpha)}{1+\gamma\,\text{sen}\,\alpha(\text{sen}\,\alpha + \mu_D\cos\alpha)}} = 1.75\,\text{m/s}.$$

**5.40**




**a)** $OH = P_1H \text{ tg } 30° = (\ell/2)(\sqrt{3}/3)$

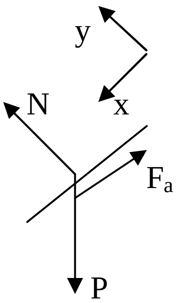
$P_2H = OH \text{ tg } \alpha = (\ell/2)(\sqrt{3}/3) \text{ tg } \alpha$

$P_2P_2 = (\ell/2) - (\ell/2)(\sqrt{3}/3) \text{ tg } \alpha$

$= \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} tg\alpha\right)$

$m_B = \gamma\, m_A$

$m_B \equiv m$
$m_A \equiv M$



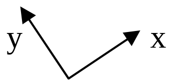

$m\, g \sin \alpha - F_a = 0$
$N - m\, g \cos \alpha = 0$

$m\, g \sin \alpha - \mu\, N = 0$

$\mu = m\, g \sin \alpha / N = m\, g \sin \alpha / m\, g \cos \alpha =$

$\mu = \text{tg } \alpha$

**b)** $v = -(g \sin \alpha)\, t + v_0$ $\quad 0 = -g(\sin \alpha)\, t + v_0$ $\quad t = v_0 / g \sin \alpha$

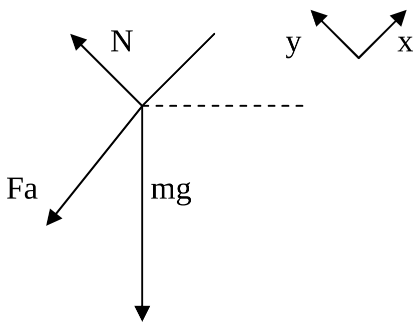



$s = v_0\, t - ½ (g \sin \alpha)\, t^2$

da cui abbiamo la distanza percorsa da t = 0 a t = t ossia dall'istante iniziale in cui il corpo B ha una velocità iniziale di $v_0$ all'istante finale un cui B è fermo e solidarmente con A e si muovono di velocità comune V $\quad s \equiv d = (v_0^2/ g \sin \alpha) - ½ (g \sin \alpha)(v_0 / g \sin \alpha)^2$ $\quad$ da cui

$$v_0 = (2\, g\, d \sin \alpha)^{1/2}$$

**c)** l'eq. di corpo libero di B è: $\quad m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F_a} = m\, \mathbf{a}$




x) $-mg \sin \alpha - \mu\, N = m\, a_{B,x}$
y) $-m\, g \cos \alpha + N = 0$

$a_{B,x} = -g \sin \alpha - \mu\, g \cos \alpha$

con questo valore di a procediamo come al punto b) ottenendo:

$$v_0 = (2\, g\, d (\sin \alpha + \mu \cos \alpha))^{1/2}$$

**d)** $P_x$ si conserva perche la risultante lungo x è zero.

$$m\, v_0 \cos\alpha = (m + M)\, V \qquad V = \frac{m}{m+M} v_0 \cos\alpha = \frac{\gamma v_0 \cos\alpha}{1+\gamma} \qquad \text{(V è funzione di } v_0\text{)}$$

$$\Delta E_k = L \qquad \tfrac{1}{2}(m+M)\, V^2 - \tfrac{1}{2} m\, v_0^2 = - m\, g\, d \sin\alpha$$

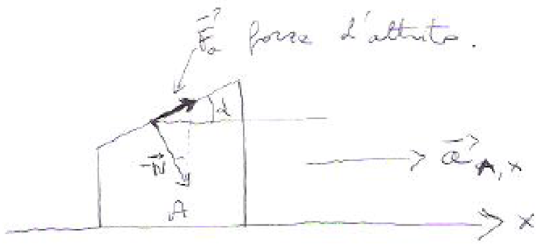
inserendo il valore di V si ha: $v_0 = \sqrt{\dfrac{2(1+\gamma) g d \sin\alpha}{1+\gamma \sin^2\alpha}}$

**e)** anche qui si può applicare la conservaz. dell'energia, solo che ora dobbiamo tener conto che $\Delta E$ non è zero ma pari al lavoro svolto dalle forze non conservative (l'attrito):

$$\Delta E = L_{n.c.} \qquad E_f - E_i = L_{n.c.}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}(m+M)\, V^2 + m\, g\, d \sin\alpha\right) - \left(\tfrac{1}{2} m\, v_0^2\right) = -\mu\, N\, d$$

*<u>Solo che ora N non è più $m\, g \cos\alpha$ poiché ora A è in movimento!</u>*



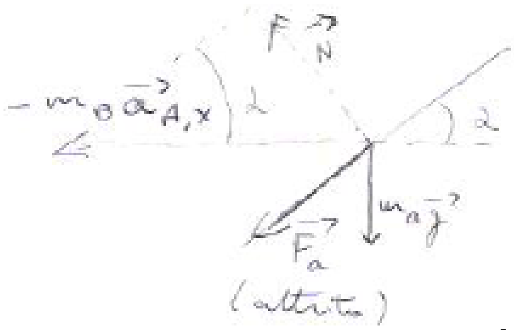

Il blocco A è soggetto alla forza di contatto - **N** (per il III principio) ed alla forza di attrito (che in questo caso si comporta come forza motrice) Questo perché l'attrito si oppone al moto relativo dei due corpi. Rispetto al corpo B, il corpo A si muove lungo le x negative e l'attrito che si oppone a tale moto ha verso concorde con x.)

L'eq. del moto di A lungo x è:

$$\mu\, N \cos\alpha + N \sin\alpha = M\, a_{A,x}$$

$$a_{A,x} = (N/M)(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)$$

Ora invece consideriamo il sistema di riferimento solidale con A, rispetto ad esso B è il quiete rispetto alla normale al piano inclinato, perciò:




$$N + m\, a_{A,x} \sin\alpha - m\, g \cos\alpha = 0$$

$$N = m\, g \cos\alpha - m\, a_{A,x} \sin\alpha$$

Inserendo il valore di $a_{A,x}$ trovata sopra si ha:

$$N = m\, g \cos\alpha - (m \sin\alpha)(N/M)(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)$$

da cui finalmente: $N = \dfrac{mg\cos\alpha}{1+\dfrac{m}{M}\sin\alpha(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$

che come avevamo detto non dipende più solamente dalla componente lungo y della forza peso di m ma anche dal valore di M e da $\mu$.

Ora non ci rimane che sostituire questo N e V nell'eq. del bilancio energetico:

$(\frac{1}{2}(m+M) V^2 + m g d \sin\alpha) - (\frac{1}{2} m v_0^2) = -\mu N d$ avendosi:

$\frac{1}{2}(m+M) ((m v_0 \cos\alpha)/(m+M))^2 + mgd \sin\alpha - \frac{1}{2} m v_0^2 =$

- $\mu d (mg \cos\alpha) / (1+(m/M) (\sin\alpha) (\sin\alpha + \mu \cos\alpha))$
-

ora con un po' di pazienza si arriva a

$$v_0^2 = \frac{2gd\sin\alpha(1+(m/M)\sin^2\alpha)+2\mu(m/M)gd\cos\alpha(1+\sin^2\alpha)}{1+\frac{m}{M}\sin\alpha(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} \quad \frac{m+M}{M+m\sin^2\alpha}$$

Ricordando che $m = \gamma M$ si ha finalmente :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(1+\gamma)gd(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{1+\gamma\sin\alpha(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}}$$