

ENERGIA ELETTROSTATICA

In meccanica si era vista una legge che connetteva gli stati di un sistema ad istanti diversi; senza dover esaminare nei dettagli i motivi fisici dell'evoluzione della variabili dinamiche. Stiamo parlando della legge di conservazione dell'energia.

Anche in elettrostatica risulta utile la sua introduzione.

Come possiamo scrivere l'energia di un sistema di cariche?

Supponiamo dapprima di avere il caso semplice di due cariche q_1 e q_2 separate da una distanza r_{12} . L'energia della coppia sarà data dal lavoro occorso per portare le cariche a tale distanza, partendo dalla situazione in cui le cariche siano molto lontane tre loro (in pratica a distanza infinita).

Si era trovato che tale lavoro è dato da $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$

Questa espressione ci da quindi l'energia associata alle nostre due cariche.

Se il numero delle cariche è maggiore di due?

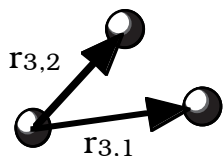
Supponiamo di avere le cariche tutte a distanza infinita l'una dall'altra. Per costruire il nostro sistema dovremo prendere ciascuna carica e, una per una, portarla nella posizione desiderata. **L'energia del sistema sarà data dalla somma di tutti i lavori fatti.**

Iniziamo dalla prima carica. Per portare questa nella posizione a lei assegnata non dovrà essere compiuto alcun lavoro in quanto tutte le altre cariche restano infinitamente lontane.



Per portare q_2 occorrerà spendere il lavoro $L_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ in quanto

la posizione a lei assegnata è vicina a quella di q_1 .



Per portare q_3 dovremo fare il lavoro $L_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$ e

così via.

Per portare la carica J_{ma} occorrerà spendere il lavoro

$$L_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} .$$

Il lavoro totale sarà dato dalla somma su J di tale espressione, ove l'indice corre da 2 fino al numero totale "N" di cariche.

Si trova quindi per l'energia elettrostatica di un sistema di cariche:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=2}^N \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j;i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Convienne riscrivere quanto trovato sotto forma più comoda per ulteriori sviluppi.

Domandiamoci quindi: **che cosa rappresenta la sommatoria $\sum_{i,j;i < j}$?**

Essa non è altro che la somma su tutte le coppie di particelle.

Convienne riscrivere detta sommatoria in modo diverso, ma perfettamente equivalente, come $\frac{1}{2} \sum_{i,j;i \neq j}$.

Perchè le due scritture sono equivalenti ?

Per cui si scrive $U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j; i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

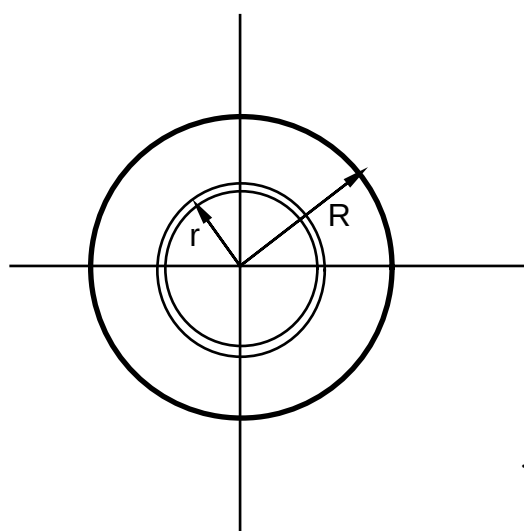
Il passo successivo consiste nel passare dal caso di cariche finite a quello di distribuzioni continue di carica.

Prima di arrivare all'espressione generale, calcoliamoci, a titolo di esempio, l'energia di una distribuzione sferica di carica avente densità costante ρ .

Potremmo pensare di costruire la nostra sfera attraverso la deposizione di successivi straterelli di spessore infinitesimo dr

Il primo passo sarà quindi quello di calcolarsi quanto lavoro è necessario per deporre il generico straterello

Evidentemente avremo $dU = dL = \frac{(4\pi r^2 dr)\rho}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)$, cioè $dU = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr$



Il lavoro necessario per costruire tutta la distribuzione sferica di carica sarà dato dall'integrale della precedente espressione.

Si avrà quindi: $U_{\text{SFERA}} = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5$. Od anche, ri-

cordando che $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$: $U_{\text{SFERA}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R}$.

Notiamo come queste espressioni ci dicono che *dovremo compiere lavoro infinitesimo per costruire una sfera infinitesima avente densità di carica finita mentre, al contrario, il lavoro risulterà infinitamente grande se tentassimo di confinare una carica finita in un volume infinitesimo.*

Teniamo per il momento a mente quanto ricavato e torniamo al problema della scrittura di una espressione per l'energia di una distribuzione continua di cariche. Come si era detto, occorre sostituire la sommatoria con un integrale.

La cosa è più agevole se si parte dall'ultima espressione per U

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i$$

dove Φ_i è il potenziale (dovuto a tutte le altre cariche) a cui è soggetta la carica q_i .

Passando al continuo, la carica q_i sarà infinitesima ed esprimibile come $q_i = \rho \cdot dv$. Per cui, sostituendo, si trovano quindi le seguenti espressioni:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(p) \Phi(p) dv = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(\mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}_j)}{r_{ij}} dv_i dv_j$$

Come notate, nelle scritture **è stata omessa la condizione che** $dv_i \neq dv_j$. Ciò significa considerare pure l'interazione di ogni carica con se stessa.

Questo è concettualmente errato. Omettiamo la condizione semplicemente in quanto, così facendo, si semplificano i calcoli senza introdurre errori

nelle valutazioni numeriche.

Vediamo di renderci conto di quanto affermato.

Potrebbe sembrare che ognuno dei termini aggiunti sia infinitamente grande. Ciò a causa della distanza $r_{i,i}$ al denominatore che parrebbe naturale assumere nulla.

Domandiamoci per questo cosa si debba intendere, dal punto di vista fisico, per distanza tra due volumetti.

La distanza è matematicamente definita solo tra punti. Dovremo quindi prendere un punto all'interno di ciascun volumetto e valutarne l'interdistanza. Quali punti scegliere? Tale scelta è arbitraria. Conseguentemente la distanza tra due volumetti di lato Δ sarà definibile a meno di una quantità dell'ordine del lato. In formule: $r_{i,j} = r_{i,j}^0 \pm \Delta$ ove $r_{i,j}^0$ è, ad esempio, la distanza tra i centri dei due cubetti. Ora se $r_{i,j}^0 \gg \Delta$, come avviene sicuramente per $\{i \neq j; \Delta \rightarrow 0\}$, la sottolineatura non ha rilevanza pratica. Nel caso invece in cui $i = j$, avremo $r_{i,j}^0 = 0$ per cui $r_{i,j} \approx \Delta$. Il denominatore quindi non sarà nullo ma dell'ordine di grandezza del lato dei cubetti.

L'ordine di grandezza del singolo termine aggiunto sarà quindi $\frac{\rho^2 (dv_i)^2}{\Delta} = \frac{\rho^2 \Delta^6}{\Delta} = \rho^2 \Delta^5$. Detto "V" il volume totale occupato dalle cariche, il numero di termini aggiunti sarà $N = \frac{V}{dv} = V \cdot \Delta^{-3}$. Per cui, complessivamente, l'ordine di grandezza dei termini aggiunti sarà $N \cdot \rho^2 \Delta^5 = V \cdot \rho^2 \Delta^2$.

Quindi l'inclusione di termini con $i = j$ altera il risultato se il valore degli elementi di volume resta finito. Passando dalla sommatoria all'integrale, facciamo tendere a zero detto valore e, con questo, il lato Δ dei cubetti. In questo caso quindi l'introduzione dei termini con $i = j$ non comporta errore dal punto di vista numerico.

Alcuni esempi per esercizio

1) Energia immagazzinata in un condensatore

Per caricare un condensatore si deve fare un lavoro e quindi vi sarà energia immagazzinata nel condensatore carico. Quale sarà il valore di questa energia?

Si potrebbe dire (un po' affrettatamente): per caricare un condensatore devo prendere una carica Q da una armatura e portarla nell'altra avente potenziale che differisce di V da quello della prima.

Il lavoro fatto sarà quindi VQ , per cui, l'energia potenziale sarà data da $VQ = \frac{Q^2}{C} = V^2 C$

Questo risultato è sbagliato! Perché ?

La differenza di potenziale tra armature non ha, infatti, un valore fisso ma dipende ad ogni istante dalla carica trasferita fino a quel momento. Ad esempio,

per trasportare il primo “dq” non si dovrà compiere alcun lavoro.

Se la carica già trasferita è “q”, per trasferire un ulteriore “dq” dovrò compiere il lavoro $dL = V(q)dq = \frac{q}{C} dq$.

L'energia totale sarà data quindi da $U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} V \cdot Q = \frac{1}{2} V^2 C$

che differisce per il fattore $\frac{1}{2}$ dal risultato precedente.

Come esempio, applichiamo quanto trovato per risolvere problemi del tipo:

1) trovare la forza agente tra le lastre di un condensatore

2) trovare il momento di forza assiale agente su di un condensatore variabile

1) Supponiamo di avere caricato il condensatore e di aver successivamente snesso le armature da qualunque corpo esterno, in modo che la carica depositata non possa variare. Immaginiamo adesso di muovere l'armatura positiva del condensatore del tratto Δz verso l'alto.

Nel fare ciò, compiremo un lavoro $-F \cdot \Delta z$ (La forza che dovremo esercitare è opposta a quella dovuta all'altra armatura). L'energia del condensatore aumenterà di $\Delta U =$

$-F \Delta z$

Si era trovato che $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ per cui $\Delta U = \frac{1}{2} Q^2 \cdot \Delta \left(\frac{1}{C} \right)$

Per il condensatore piano $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ per cui $\Delta \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{1}{\epsilon_0 A} \Delta z$

Si trova quindi $F = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A}$

Armeggiando un poco $[Q/A = \sigma ; \sigma/\epsilon_0 = E_0]$, la formula precedente può pure essere scritta come $F = -\frac{1}{2} Q E_0$, dove E_0 è il modulo del campo all'interno del condensatore.

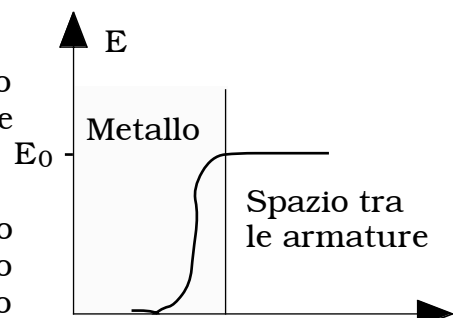
Come si vede la componente z della forza è negativa cioè diretta verso il basso, come deve essere.

Domandiamoci: da dove deriva, fisicamente, il fattore 1/2? Perché la forza non è uguale ad $Q E_0$?

Il campo che esercita la forza su di una lastra è quello dovuto alle cariche presenti sull'altra e tale campo è proprio $\frac{1}{2} E_0$.

Si potrebbe obiettare dicendo che in fondo il campo visto da una carica infinitesima “dq” sulla superficie della lastra è proprio E_0 e non $\frac{1}{2} E_0$.

Si deve però tenere conto che le cariche non saranno tutte sulla superficie ma saranno disposte in uno straterello dello spessore di alcuni Å. Il campo elettrico



visto dalle singole cariche non sarà quindi uguale per tutte ma varierà grossomodo come mostrato in figura. Solo quelle più esterne vedranno E_0 , mentre quelle in posizione interna vedranno un campo via via più schermato.

Il campo medio visto dalle cariche sarà quindi $\frac{1}{2}E_0$.

1b) Quando si applichi il principio dei lavori virtuali per il calcolo delle forze occorre prestare attenzione. Per chiarire il tipo di errore a cui si può andare incontro, calcoliamo la forza F supponendo che il condensatore sia connesso ad un generatore di differenza di potenziale. In questa situazione, non è detto che la carica sulle armature resti costante, mentre lo resta certamente la d.d.p. tra queste. È tuttavia evidente che il valore della forza tra le armature non potrà dipendere dal fatto che il condensatore sia o meno connesso con il generatore.

Nel caso a cui adesso ci riferiamo, è più semplice adoperare, per esprimere l'energia potenziale, l'espressione $U = \frac{1}{2}V^2 \cdot C$

Procedendo come prima si ha: $\frac{1}{2}V^2\Delta(C) = -F \cdot \Delta z$

ove $\Delta C = \epsilon_0 A \cdot \Delta\left(\frac{1}{d}\right) = -\frac{\epsilon_0 A}{d^2} \Delta z$ per cui si trova

$$F = +\frac{1}{2}V^2 \frac{C}{d} = +\frac{1}{2}E_0(V \cdot C) = +\frac{1}{2}E_0 Q$$

Si è trovato un valore positivo per F (Le armature si respingono se sono mantenute a d.d.p. costante, cioè se sono attaccate ad un generatore?).

Questo risultato è chiaramente sbagliato: perché? Evidentemente non si è tenuto conto di tutto.

La capacità cambia ma la d.d.p. resta la stessa. Come può avvenire ciò ?

Il generatore non è rimasto inattivo.

Per mantenere invariata la differenza di potenziale mentre allontanavamo le armature, esso ha dovuto trasferire cariche da una armatura all'altra. Anche il generatore ha quindi contribuito a far variare l'energia del sistema.

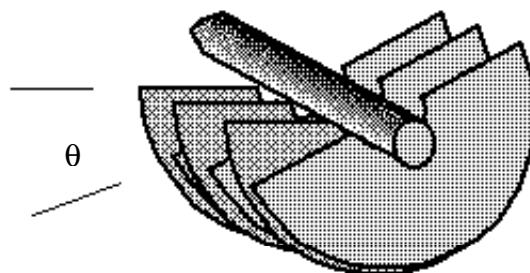
La carica trasferita sarà $\Delta Q = V \cdot \Delta C$, per cui il lavoro fatto dallo strumento varrà $V \cdot \Delta Q = V^2 \cdot \Delta C$

Dovremo quindi scrivere che la variazione di energia del condensatore è data dalla somma di due termini: $\Delta U = \frac{1}{2}V^2 \cdot \Delta C = V^2 \cdot \Delta C - F \cdot \Delta z$

od anche $F \cdot \Delta z = +\frac{1}{2}V^2 \Delta C$

Procedendo, si perverrà quindi ad un valore per la forza opposto a quello precedentemente trovato ed identico a quanto trovato nel caso del condensatore sconnesso dal generatore.

2) Prendiamo come altro esempio, quello di un condensatore variabile simile a quello mostrato in figura e composto da N lamelle mobili ed N fisse di area "A" distanti tra loro "d".



Ci si chiede di trovare il momento assiale agente sulla parte mobile, in funzione dell'angolo θ e della carica Q

Il condensatore variabile potrà essere schematizzato come il parallelo di $2N-1$ condensatori piani aventi ciascuno area delle armature uguale alla superficie affacciata delle lamelle. Detta superficie affacciata, nulla per $\theta = \pi$ ed uguale ad "A" per $\theta = 0$, potrà essere scritta come linearmente dipendente dall'angolo θ .

Si perviene così alla espressione $C = (2N-1) \frac{\epsilon_0}{d} A \frac{(\pi-\theta)}{\pi}$ per la capacità del condensatore variabile.

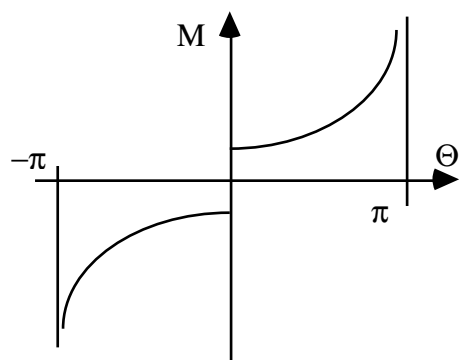
Si avrà quindi $\Delta U = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right) = -M \cdot \Delta \theta$. Ove "M" è il momento assiale cercato.

Ora:

$$\Delta \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{1}{C^2} \Delta C = -\frac{d\pi}{C(2N-1)\epsilon_0 A(\pi-\theta)} \frac{(2N-1)\epsilon_0 A}{d} \frac{(-1)}{\pi} \Delta \theta \text{ od anche:}$$

$$\Delta \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{1}{C(\pi-\theta)} \Delta \theta$$

$$\text{Da cui: } M = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{1}{\pi-\theta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 d \pi}{\epsilon_0 A (2N-1)} \cdot \frac{1}{(\pi-\theta)^2}$$



Questo risultato è ragionevole?

Se si ruotasse l'armatura mobile nell'altro senso si otterrebbe un risultato analogo, da cui il grafico riportato.

Come mai la funzione $M = M(\theta)$ non è una funzione continua nel punto $\theta=0$?

Come mai, inoltre, $M \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow \pi$?

Se questo fosse vero, nessuno, per quanto forte possa essere, riuscirebbe ad estrarre completamente le lamelle.

Si invita lo studente a rispondere ai quesiti.

LOCALIZZAZIONE DELL'ENERGIA

Si era detto che l'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche è data da $U = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ oppure, qualora si abbia a che fare con distribuzioni

continue di cariche, da $U = \frac{1}{2} \int_{Volume} \rho \cdot \Phi dv$.

Ci si potrebbe domandare: **dove si trova questa energia, dove è localizzata?**

L'energia è un qualche cosa associato alla presenza di una coppia di cariche interagenti. Sappiamo come calcolarla, gli effetti che produce ma, al di là di

questo, non è simile ad una particella. Non è quindi scontato che la domanda posta abbia significato fisico.

Il concetto di energia potenziale può essere interpretato come un semplice espediente per calcolare correlazioni tra le velocità delle particelle a differenti istanti.

Esistono tuttavia motivi che ci inducono a ritenere che l'energia sia un qualche cosa di più di questo.

Consideriamo ad esempio la legge di conservazione dell'energia. In qualsivoglia situazione fisica, nell'esplicitare la legge, si è obbligati a considerare solo i contributi all'energia del sistema che si trasformino da un tipo ad un altro.

Ora l'esperienza ci dice che tale trasformazione implica sempre un contatto fisico tra corpi e che detto contatto fisico avviene in ben determinati punti ed a ben determinati istanti.

Alcuni esempi:

Perché l'energia potenziale di tipo elastico associata ad una molla compressa si trasformi in energia cinetica di una biglia occorre il contatto fisico tra i suddetti oggetti.

Occorre sempre il contatto fisico perché l'energia cinetica di un corpo si trasformi, per attrito, in energia termica del tavolo.

*Tutto sembra indicare che l'energia sia qualche cosa di più del semplice ingrediente di una, pur utile, regoletta. Siamo spinti, in altri termini, a dire che, forse, l'energia è spazialmente localizzata. **Potremmo capire di più riguardo ai fenomeni fisici se riuscissimo a scrivere una funzione matematica per la densità di energia.***

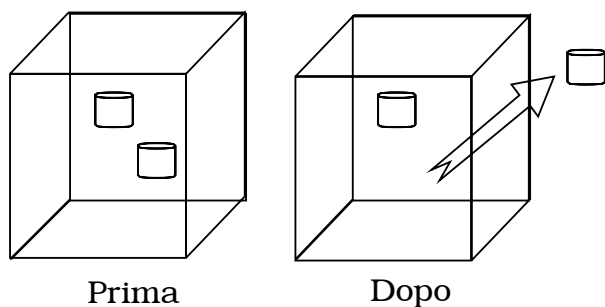
È inoltre evidente che ricerchiamo l'espressione dell'energia di un sistema di cariche anche al fine di introdurla all'interno della corrispondente legge di conservazione.

Partiamo da una **evidenza sperimentale**: *il modo semplice di esprimere una legge di conservazione, quello che dice che in un sistema isolato la quantità totale di si conserva nel tempo, non descrive in compiutamente la realtà.*

Riferiamoci, per esempio, alla legge di conservazione della massa.

Dire semplicemente che la massa si conserva, non contiene l'inoppugnabile dato di fatto che il trasferimento di un oggetto da un punto ad un altro avviene sempre seguendo un percorso che porta dalla primitiva posizione alla nuova. Non contiene inoltre il fatto che detto trasferimento non avvenga istantaneamente ma che necessiti di un tempo finito.

L'esperienza dice di più del semplice conservarsi del valore totale di una grandezza. Quindi dovremo scrivere le leggi di conservazione in modo che descrivano tutto ciò che l'esperienza ci dice essere vero.



Ciò viene fatto esprimendo le **leggi di conservazione in forma locale**. Il concetto è questo: **se la massa contenuta all'interno di un dato volume diminuisce, detta diminuzione è unicamente dovuta al fatto che della massa ha attraversato, in qualche suo punto, la superficie delimitante il volume stesso, portandosi con questo al suo esterno.**

Torneremo in seguito sull'argomento. Al momento notiamo solo che ci sono ulteriori motivi fisici che spingono verso la ricerca di una formulazione locale

delle leggi di conservazione.

Ad esempio:

Una qualsiasi legge di conservazione deve potersi esprimere sotto forma locale in quanto, se così non fosse, si potrebbero trovare dei sistemi di riferimento inerziali in cui detta legge di conservazione non è, istante per istante, verificata.

Nel caso particolare, la teoria della relatività ci dice che massa ed energia sono equivalenti: $E = mc^2$. Qualsiasi forma di energia è per questo sorgente di forze gravitazionali. Se non sapessimo localizzare l'energia, non sapremmo dire dove si trovano le sorgenti del campo gravitazionale e la teoria della gravitazione sarebbe incompleta.

Se ci si limita all'elettrostatica non si può rispondere alla domanda se l'energia elettrostatica sia o meno localizzata; comunque è utile anticipare questi concetti.

Abbiamo espresso l'energia elettrostatica sotto forma di un integrale di volume. La funzione integranda ha le dimensioni di una densità spaziale di energia. **Viene quindi da chiedersi se essa possa rappresentare fisicamente una densità di energia.**

La risposta è negativa, e, per capire ciò, ricordiamo l'esempio della molla e della biglia. Avete visto che l'energia associata ad una molla compressa poteva trasformarsi in energia cinetica di una massa solo se i due oggetti erano posti a contatto. È spontaneo pensare l'energia elastica come localizzata nella molla e quella cinetica nella massa in moto e che l'energia possa trasferirsi solo grazie al contatto fisico tra molla e massa.

Domandiamoci quindi quali siano le condizioni necessarie per fornire energia cinetica ad un oggetto carico.

Un tale oggetto può acquistare energia solo se nel punto in cui si trova è presente un campo elettrico. Potenziali o densità di carica sono inefficaci per detto scopo. Sono i campi che accelerano le particelle (a contatto con essi). Inoltre se le cariche acquistano (perdono) energia cinetica, i campi in modulo diminuiscono (aumentano). Queste analogie ci conducono a ritenere che i "contenitori" di energia siano i campi e che siano essi a trasferirla alle particelle cariche.

Condizione necessaria per poter pensare l'energia elettrostatica localizzabile è quindi il poterla esprimere come integrale di volume di una funzione che dipenda dai campi elettrici.

In effetti si vede che numericamente vale l'uguaglianza $U = \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv$.

È come se in ogni punto dello spazio fosse localizzata l'energia con densità "u" data da: $u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$

Vediamo di ricavare la relazione sopra scritta.

Sappiamo che $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ per cui si può scrivere $U = \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi dv = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \Phi \cdot \nabla^2 \Phi dv$

Vediamo come si può riscrivere

—

Consideriamo il primo dei tre termini: $\phi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi$

$$\text{Evidentemente } \phi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial}{\partial x} \phi \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi \right)$$

L'espressione appena scritta non è quindi altro che la componente "x" di $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) - (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \phi)$

$$\text{Si ha quindi che: } U = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \Phi \cdot \nabla^2 \Phi \, dv = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) \, dv + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi \, dv.$$

Il volume di integrazione "V" deve necessariamente contenere tutte le cariche ma per il resto è arbitrario e possiamo, qualora servisse, anche farlo tendere all'infinito.

Puntualizzato questo, vediamo di valutare il primo dei due integrali.

Adoperando il teorema di Gauss si può trasformare l'integrale di volume in un integrale sulla superficie che lo delimita $\int_V \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) \, dv = \int_{Sup} \phi \vec{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n} \, ds$

Supponiamo adesso di scegliere, come dominio di integrazione, una sfera di raggio "R" molto grande rispetto alle dimensioni della zona occupata dalle cariche. In questo caso, supponendo la carica totale del sistema non nulla, avremo sulla superficie $\phi \sim \frac{1}{R}$; $|\vec{\nabla} \phi| \sim \frac{1}{R^2}$. Per cui $\int \phi \vec{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n} \, ds \sim \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot R^2 \sim \frac{1}{R}$.

In parole, il valore dell'integrale è inversamente proporzionale al raggio della sfera su cui integriamo. Ovviamente, dipendenze ancora più rapide si troverebbero nel caso in cui la carica totale fosse nulla.

Qualunque sia, quindi, il valore della carica totale, l'integrazione su tutto lo spazio, ottenuta mandando "R" all'infinito, dà risultato nullo.

In questo caso sopravvive solo il secondo dei due integrali, per cui si ottiene:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\text{tutto lo spazio}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

Da cui l'espressione $u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$ per la densità di energia elettrostatica.

NOTA:

Da quanto sopra, dato che anche una singola carica genera campo elettrico, dovremo associare energia elettrostatica pure a detta situazione fisica. Che cosa rappresenta questa energia?

Essa rappresenta il lavoro necessario alla formazione della carica a partire da cariche infinitesime.

Troviamone il valore per una carica sferica metallica di raggio "r₀":

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} ; u = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \cdot \frac{q^2}{r^4} ; U = \int u \, dv = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} q^2 \int r^{-4} \, dv$$

$$\text{ove } dv = 4\pi r^2 dr \text{ e quindi, } U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} q^2 \int_{r_0}^{\infty} r^{-2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} (-) r^{-1} \Big|_{r_0}^{\infty} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_0}$$

Notiamo per inciso che il risultato differisce dall'analogo ricavato precedentemente, per altra via, in questo stesso capitolo solo in quanto all'interno della

sfera metallica non vi è campo elettrico. L'integrazione è stata effettuata quindi sul solo spazio "esterno" alla carica.

Raggio classico dell'elettrone ed altre conseguenze

Osservando la dipendenza dell'energia dal raggio della sfera vediamo subito che: $\lim_{r_0 \rightarrow 0} U = \infty$

Vi è quindi un'energia infinita nel campo di una carica puntiforme. L'uomo non sarebbe mai in grado di costruirne neppure una. Una eventuale carica puntiforme sarebbe quindi al di fuori della descrizione fisica della natura.

In generale si esprime tale concetto dicendo che *l'idea di localizzare l'energia elettrostatica nel campo elettrico è incompatibile con l'esistenza di cariche puntiformi.*

Sorgono le domande: si hanno evidenze sperimentali di cariche puntiformi?

Se esistono vanno ovviamente ricercate tra le cosiddette "particelle elementari".

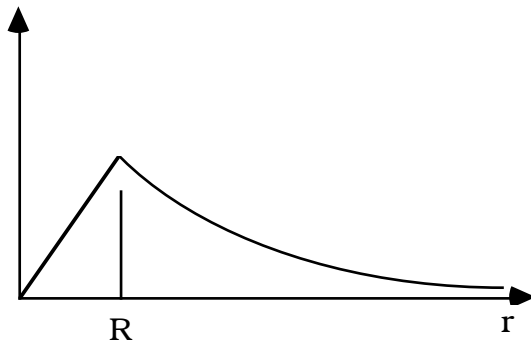
Sono queste puntiformi? In particolare: **l' elettrone è puntiforme?**

Dal punto di vista della fisica classica esso non può essere puntiforme se la legge di Coulomb è vera, se l'energia è effettivamente localizzabile nei campi e se la formulazione di Einstein della teoria della relatività è corretta.

Proviamo ad utilizzare quanto sopra per **stimare l'ordine di grandezza del raggio di un elettrone.** Se, ad esempio, trovassimo valori dell'ordine delle dimensioni

atomiche o più grandi ancora, sarebbe evidente che dovremmo rinunciare all'idea di localizzare l'energia nei campi. L'esperienza ci dice infatti che le dimensioni di un elettrone sono molto inferiori a quelle di un atomo.

Supponiamo che l'elettrone sia una sfera di raggio R con densità uniforme di carica. La figura mostra il campo elettrico in funzione della distanza dal centro della particella. In particolare, al suo interno sarà



dato da

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \quad E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} ,$$

mentre all'esterno avremo $4\pi r^2 E = \frac{e}{\epsilon_0}$ da cui: $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$

$$\begin{aligned} \text{Si ha quindi : } U &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_0^R \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{r^2}{R^6} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} r^{-4} 4\pi r^2 dr \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot 4\pi \left[\frac{1}{R^6} \cdot \frac{1}{5} \cdot R^5 + \frac{1}{R} \right] = \frac{e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Per valutare R dobbiamo ricavare dall'energia U previsioni per il valore di una grandezza misurabile e confrontare poi dette previsioni con dati sperimentali. Einstein ci dice che a questa energia sarà associata una massa "m" tale che

$$m = U/c^2 \text{ per cui potremo scrivere: } m = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{Rc^2}$$

Ovviamente il valore della massa associata alla energia elettromagnetica dovrà

essere inferiore od al massimo uguale alla massa m_e dell'elettrone.

Se fosse inferiore, fino a quando non avessimo individuata la ragione fisica di tale fatto, non sarebbe corretto considerare l'elettrone come particella elementare.

Facendo per questo l'ipotesi che $m = m_e$ avremo $R = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m_e c^2}$

Abbiamo ottenuto come risultato il prodotto di un fattore numerico dell'ordine dell'unità ($\frac{3}{5}$) per una espressione, usualmente indicata con " r_0 ", costituita unicamente da costanti fondamentali.

Il fattore numerico dipende da come ci immaginiamo distribuita la carica all'interno dell'elettrone. Si prende, per questo, " r_0 " come stima del raggio della particella. Esso prende il nome di **raggio classico dell'elettrone**

$$\text{Numericamente } r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \approx \frac{1,6 \cdot 1,6}{9} \cdot 10^{-14} \sim 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ metri}$$

Come vedete **si è ottenuto un valore molto più piccolo delle dimensioni atomiche.** *L'elettrone, anche se ha un raggio non nullo, può essere considerato tranquillamente come puntiforme in moltissimi casi. Tuttavia il fatto che puntiforme non sia, indica che ci sono degli aspetti della teoria che dovranno essere, a qualche livello, riconsiderati.*

Mi soffermo solo un attimo per far notare come l'idea di localizzare l'energia nei campi non sia, per così dire, "indolore". Essa è fonte di "paradossi" che non trovano risposta nella fisica classica. Essi vanno accettati, riponendoli per il momento in un cassetto, solo in quanto ciò che deve prevalere è l'idea di "interazione locale": una molla mette in moto una biglia solo se la urta.

L'equivalenza tra massa ed energia implica che, se l'energia è localizzata nello spazio, pure la massa associata all'elettrone è localizzata spazialmente. **Il punto è: "dove" è localizzata.**



dV_2

È facile dedurre da quanto detto che, perlomeno in parte, essa è localizzata all'esterno di quella sferetta di raggio r_0 che immaginiamo rappresentare l'elettrone stesso. Essa è localizzata in quella deformazione delle proprietà fisiche dello spazio che descriviamo attraverso il campo Elettrico.

Da questa osservazione consegue:

1) La massa di una particella non è una sua caratteristica intrinseca ma dipende dalla situazione fisica in cui è posta. Ad esempio un elettrone posto in un solido può essere in grado di produrre deformazioni delle proprietà fisiche dell'ambiente circostante oltre quelle descrivibili tramite il suo campo elettrico. In questo caso pure tali deformazioni contribuiranno alla massa dell'elettrone.



dV_1



e^-

2) A causa della caratteristica vettoriale del campo elettrico e della relazione non lineare tra questo e densità di energia o di

massa, l'additività dei campi porta alla non additività delle densità di massa.

Ad esempio, facendo riferimento alla figura, la massa totale contenuta in dv_1 è notevolmente inferiore ai contributi dovuti separatamente ai singoli elettroni. Invece a grande distanza, come in dv_2 , la densità di massa dovuta alla coppia di elettroni è circa quattro volte maggiore del contributo dovuto al singolo e^- .

3) Supponete inoltre di avere due particelle cariche dello stesso segno. Le forze elettrostatiche sono in questo caso repulsive. Individuate, per esercizio, le regioni di spazio ad alta densità di energia localizzata. Come vedrete, il disegno avrà forma simile a quella di un orbitale molecolare di antilegame; la cui occupazione, come è noto, genera forze repulsive tra gli atomi.

Analogamente, provate a fare la mappatura per il caso di due particelle di segno opposto, che, come è noto, si attraggono. Il disegno sarà in questo caso simile ad un orbitale di legame, dalla cui occupazione dipende il formarsi delle molecole.

Sorge la domanda: l'analogia riscontrata è casuale o meno?

La risposta esula da un corso di fisica generale; tenete comunque a mente la cosa.