

# Simulazione Senigallia 2011.

Andrea Caleo, Giuliano Chiriaco, Matteo Ippoliti

- Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti.
- É consentito l'uso di una calcolatrice scientifica non programmabile, e l'uso di una tabella di costanti fisiche distribuita nelle gare nazionali.
- Tutte le risposte devono essere chiaramente motivate.

## Problema 1: Un pendolo montato su un blocco. (100 punti)

Un pendolo semplice, costituito da un filo inestensibile di lunghezza  $l$  a cui è appesa una massa  $m$ , è montato su un blocco di massa  $M$  poggiato su un piano orizzontale. Tra blocco e piano è presente solo attrito statico  $\mu_s$  ( $\mu_d = 0$ ). Il blocco e il pendolo sono inizialmente in moto con velocità  $v_0$ , ed il pendolo è nella posizione di equilibrio; urtano frontalmente un secondo blocco in modo elastico. In seguito all'urto il primo blocco si arresta.

1. Determinare la massa del secondo blocco.
2. Supponendo che  $\mu_s$  sia abbastanza grande da impedire strisciamenti e da far restare fermo il primo blocco, determinare il valore minimo  $v_{min}$  di  $v_0$  necessario perchè il pendolo percorra un giro completo.
3. Supponendo che  $v_0 = v_{min}$  e che valga  $m \ll M$ , determinare il valore minimo di  $\mu_s$  necessario perchè il primo blocco resti in quiete.

## Problema 2: Due in uno! (100 punti)

### 2.A: Un ciclo termodinamico. (35 punti)

Si consideri un ciclo termodinamico costituito dalle seguenti trasformazioni: un'espansione adiabatica dal volume  $V_1$  a  $V_2$  e dalla temperatura  $T_1$  a  $T_2$ ; una compressione isoterma fino a  $V_1$  e una trasformazione isocora che riporta il gas alla temperatura  $T_1$ .

1. Esprimere il rendimento del ciclo in funzione di  $T_1$  e  $T_2$ .
2. Confrontarlo con il rendimento del ciclo di Carnot che opera tra le stesse temperature nel caso  $T_1 = 2T_2$ .

### 2.B: Diffrazione da tre fenditure. (65 punti)

Si realizza un esperimento di interferenza tra tre fenditure sottili aventi la stessa larghezza, utilizzando luce coerente di lunghezza d'onda  $\lambda$ . Le fenditure sono disposte verticalmente; la distanza tra la prima fenditura e la seconda è  $a$ , e la distanza tra la seconda e la terza è  $\frac{3}{2}a$ . Uno schermo si trova a distanza molto maggiore di  $a$  dalle fenditure e vi si può osservare una figura di interferenza. Si indica con  $\theta$  l'angolo tra le fenditure e lo schermo, e si considerano solo angoli  $\theta \ll 1$ . Sia  $I(\theta)$  l'intensità della luce che arriva all'angolo  $\theta$ .

1. Determinare i valori di  $\theta$  in cui l'intensità è massima.
2. Sia  $\theta_1$  il più piccolo valore di  $\theta$  non nullo in cui l'intensità è massima. Determinare  $I(\theta_1/2)/I(0)$ .
3. Sia  $\delta = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$ . Dimostrare che vale la relazione di proporzionalità:

$$I(\theta) \propto 3 + 2(\cos \delta + \cos \frac{3}{2}\delta + \cos \frac{5}{2}\delta)$$

### Problema 3: Polarizzazione di un dielettrico. (100 punti)

In questo problema ci proponiamo di fare un modello (molto rudimentale) per il fenomeno della polarizzazione di un dielettrico. Schematizzeremo un atomo come una nube sferica di raggio  $R$  e carica positiva  $q$  (uniformemente distribuita), che chiameremo nucleo, con al suo interno una carica puntiforme  $-q$ , che chiameremo elettrone (modello atomico "a panettone" di Thompson).

1. Determinare il campo elettrico  $\vec{E}(r)$  che il nucleo genera al proprio interno; dire dove si dispone l'elettrone all'equilibrio e calcolare il lavoro necessario a portarlo dalla posizione d'equilibrio ad una distanza infinita dal nucleo.
2. Si supponga di applicare lentamente all'atomo così schematizzato un campo elettrico esterno uniforme e costante  $\vec{E}_0$ . Si assume che il nucleo non venga deformato dal campo esterno. Dire sopra quale valore  $E_+$  l'elettrone viene strappato definitivamente al nucleo. Assumendo  $E_0 < E_+/2$  per tutto il resto del problema, calcolare  $\vec{\delta}$ , lo spostamento della nuova posizione di equilibrio rispetto alla vecchia.
3. Si supponga ora di avere un gas di questi atomi, sufficientemente rarefatto da poter trascurare le reciproche interazioni tra gli atomi, confinato in un condensatore a facce piane e parallele di area  $A$  distanti  $D$ , con  $D \ll \sqrt{A}$  (trascuriamo cioè gli effetti di bordo). Sia  $N$  il numero medio di atomi per unità di volume. Se applichiamo al condensatore una d.d.p.  $V = E_0 D$ , ogni singolo atomo si polarizzerà nel modo studiato nelle domande precedenti. Determinare la densità superficiale di carica di polarizzazione che compare sulle facce del condensatore e il campo elettrico prodotto dal mezzo.
4. Determinare la costante dielettrica relativa del gas in funzione di  $\chi$ , la frazione di volume del condensatore occupata dagli atomi.
5. Sapendo che per la tipica costante dielettrica relativa di un gas vale  $\epsilon_r - 1 \sim 10^{-5}$ , e assumendo che il gas nel condensatore si trovi approssimativamente in condizioni standard di temperatura e pressione, stimare l'ordine di grandezza del raggio atomico. Confrontare la stima così ottenuta con i dati reali. C'è un accordo accettabile?
6. Confrontare il potenziale di ionizzazione dell'atomo di idrogeno (13,6 eV) con l'ordine di grandezza fornito da questo modello (usare la stima di  $R$  fatta al punto precedente). C'è un accordo accettabile?

## Soluzione problema 1.

- Questo problema è tratto dalla raccolta "Un esercizio al giorno", rintracciabile dall'indirizzo <http://www.df.unipi.it/cella/daily/Meccanica.html>.

1. Durante l'urto le uniche forze impulsive sono quelle che agiscono orizzontalmente tra i due blocchi. Possiamo quindi trascurare la presenza del pendolo, e la massa del secondo blocco è quindi uguale a quella del primo, perchè solo in questo caso quest'ultimo si ferma. **(13 punti)**
2. La velocità del pendolo sarà inizialmente  $v_0$ . Nel punto più alto essa diverrà, per la conservazione dell'energia:

$$v^2 = v_0^2 - 4gl$$

e la tensione del filo, che insieme alla forza di gravità contribuisce alla forza centripeta, sarà data da:

$$m \frac{v^2}{l} = T + mg$$

da cui si trova:

$$T = m \left( \frac{v_0^2}{l} - 5g \right)$$

Si può notare che questo è il punto in cui  $T$  assume il suo valore minimo; negli altri punti  $v^2$  è infatti più grande, perchè si trovano più basso, ed in tali punti la gravità contribuisce in maniera minore alla forza centripeta perchè non è diretta lungo il filo. Perciò la condizione da imporre è:

$$T = m \left( \frac{v_0^2}{l} - 5g \right) \geq 0$$

Da cui  $v_{min} = \sqrt{5gl}$ . **(27 punti)**

3. Ad un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale, per la conservazione dell'energia la velocità è:

$$v^2 = v_{min}^2 - 2gl(1 - \cos(\theta)) = gl(3 + 2\cos(\theta))$$

e la tensione è determinata da:

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos(\theta)$$

da cui

$$T = 3mg(1 + \cos(\theta))$$

Sia  $N$  la reazione vincolare del piano sul carrello (quindi  $\vec{N}$  è perpendicolare al piano) e  $F_a$  la forza d'attrito (quindi  $\vec{F}_a$  è diretta lungo il piano, in direzione opposta alla componente orizzontale di  $\vec{T}$ ). L'equilibrio delle forze sul carrello è:

$$F_a + T \sin(\theta) = 0$$

$$N - T \cos(\theta) - Mg = 0$$

da cui:

$$F_a = -3mg(1 + \cos(\theta)) \sin(\theta)$$

$$N = 3mg \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) + Mg$$

La condizione da imporre è  $|F_a| \leq \mu_s N$  da cui si ricava:

$$\mu_s \geq \frac{(1 + \cos(\theta)) \sin(\theta)}{(1 + \cos(\theta)) \cos(\theta) + \frac{M}{3m}} \approx \frac{3m}{M} (1 + \cos(\theta)) \sin(\theta)$$

Per imporre che questa condizione sia valida per ogni  $\theta$ , si deve imporre che sia valida quando  $(1 + \cos(\theta)) \sin(\theta)$  è massimo; notando che  $(1 + \cos(\theta)) \sin(\theta) = \sin(\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\theta)$  e derivando si trova che bisogna considerare i punti in cui  $\cos(\theta) = -\cos(2\theta)$ , ovvero  $\cos(\pi - \theta) = \cos(2\theta)$ , ovvero  $\theta = \frac{\pi}{3}$  e  $\theta = \pi$ . Il massimo si ha per  $\theta = \pi/3$  e si ottiene la condizione:

$$\mu_s \geq \frac{9\sqrt{3}}{4} \frac{m}{M}$$

(40 punti)

4. (20 punti per la completezza della soluzione, 1 per ogni punto oltre 60)

## Soluzione problema 2.

### Soluzione 2A.

1. Il gas assorbe calore durante l'isocora e lo cede durante l'isoterma. Usando  $\Delta Q = \Delta U + L$  si ha:

$$|Q_2| = L_2 = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_3 = \Delta U_3 = nC_v(T_1 - T_2)$$

Poichè  $Q_2$  è negativo si ha che  $L_{tot} = Q_3 - |Q_2|$  e dunque:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_3} = 1 - \frac{RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{C_v(T_1 - T_2)}$$

Introducendo il coefficiente adiabatico del gas  $\gamma$  si ha che  $\gamma = C_p/C_v = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$ , da cui

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Inoltre nell'adiabatica si ha  $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$  da cui

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{\ln \frac{T_1}{T_2}}{\gamma - 1}$$

. (25 punti)

2. Sostituendo i valori si ha:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_3} = 1 - \frac{RT_2(\gamma - 1)}{C_v(T_1 - T_2)} \cdot \frac{\ln \frac{T_1}{T_2}}{\gamma - 1} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{T_1}{T_2}}{T_1 - T_2}$$

Per  $T_1 = 2T_2$  si ha

$$\eta = 1 - \ln 2 = 0,31$$

mentre il rendimento di una macchina di Carnot tra le stesse temperature è:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,5$$

Volendo confrontare i due rendimenti per qualsiasi valore di  $T_1$  e  $T_2$ , essi si possono esprimere in funzione di  $x = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$  e studiare  $\eta_c - \eta$  in funzione di  $x$  positivo. Così si trova che questa funzione ha un minimo assoluto in 0, cioè quando  $T_1 = T_2$  e in quel caso i due rendimenti sono entrambi uguali a 0. Pertanto se ne conclude che il rendimento del ciclo di Carnot è sempre maggiore o uguale di quello del ciclo dato.

Equivalentemente che il rendimento trovato sia sempre minore o uguale di quello di un ciclo di Carnot operante tra le stesse temperature si spiega col fatto che quest'ultimo è miglior rendimento ottenibile da una macchina termica che opera tra due date temperature. **(10 punti)**

## Soluzione 2B.

1. La differenza di cammino tra la luce proveniente dalla prima fenditura e quella proveniente dalla seconda è  $a \sin \theta$ ; la differenza di cammino tra la luce proveniente dalla prima fenditura e quella proveniente dalla terza è  $\frac{5}{2}a \sin \theta$ . Perciò la differenza di fase tra la luce proveniente dalla prima e dalla seconda fenditura è  $\delta = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$ , mentre la differenza di fase tra la luce proveniente dalla prima e dalla terza fenditura è  $\frac{5}{2}\delta$ .

Si ha un massimo nella figura di interferenza quando la luce proveniente dalle tre fenditure è in fase; perciò quando  $\delta$  e  $\frac{5}{2}\delta$  sono entrambi multipli di  $2\pi$ , e quindi per  $\delta_n = 4\pi n$  con  $n \in \mathbb{N}$  che implica (supponendo  $\theta < 1$  e quindi  $\sin \theta \approx \theta$ )  $\theta_n \approx 2n\frac{\lambda}{a}$ . **(15 punti)**

2. Si ha  $\theta_1/2 = \frac{\lambda}{a}$ ; lo sfasamento in questo caso è  $\delta = 2\pi$ . Nel caso  $\theta = 0$ , invece, lo sfasamento è nullo.

Si può scrivere il campo elettrico delle tre onde luminose che dalle fenditure raggiungono lo schermo come:

$$E_1(\theta, t) = E_0 \cos(wt)$$

$$E_2(\theta, t) = E_0 \cos(wt - \delta)$$

$$E_3(\theta, t) = E_0 \cos(wt - \frac{5}{2}\delta)$$

Dove si è imposto che le ampiezze siano uguali perchè la larghezza delle fenditure è la stessa, e la distanza tra le fenditure e il punto considerato sullo schermo è approssimativamente la stessa per tutte le fenditure. Si ha quindi:

$$E(\theta, t) = E_1(\theta, t) + E_2(\theta, t) + E_3(\theta, t) = E_0(\cos(wt) + \cos(wt - \delta) + \cos(wt - \frac{5}{2}\delta))$$

Nel caso  $\theta = \frac{\lambda}{a}$ ,  $\delta = 2\pi$  si ha:

$$E(\lambda/a, t) = E_0 \cos(wt)$$

Nel caso  $\theta = 0$ ,  $\delta = 0$  si ha:

$$E(0, t) = 3E_0 \cos(wt)$$

Da cui, notando che l'intensità di un'onda elettromagnetica è proporzionale alla media nel tempo del quadrato dell'ampiezza del campo elettrico,  $I(\theta_1/2)/I(0) = (1/3)^2 = 1/9$ . **(20 punti)**

3. Usando la formula di sottrazione del coseno si ricava:

$$E(\theta, t) = E_0(\cos(wt) + \cos(wt - \delta) + \cos(wt - \frac{5}{2}\delta)) =$$

$$= E_0(\cos(wt)(1 + \cos(\delta) + \cos(\frac{5}{2}\delta)) + \sin(wt)(\sin(\delta) + \sin(\frac{5}{2}\delta))) \equiv E_0(A \cos(wt) + B \sin(wt))$$

Da cui:  $E^2(\theta, t) = E_0^2(A^2 \cos^2(wt) + B^2 \sin^2(wt) + 2AB \sin(wt) \cos(wt))$  Notando nuovamente che l'intensità di un'onda elettromagnetica è proporzionale alla media nel tempo del quadrato dell'ampiezza del campo elettrico, che la media temporale di  $\sin(wt) \cos(wt)$  è nulla e le medie di  $\sin^2(wt)$  e  $\cos^2(wt)$  sono  $1/2$ , si ha:

$$I(\theta) \propto A^2 + B^2 = (1 + \cos(\delta) + \cos(\frac{5}{2}\delta))^2 + (\sin(\delta) + \sin(\frac{5}{2}\delta))^2 =$$

$$= 3 + 2(\cos(\delta) + \cos(\frac{5}{2}\delta) + \cos(\delta) \cos(\frac{5}{2}\delta) + \sin(\delta) \sin(\frac{5}{2}\delta)) =$$

$$= 3 + 2(\cos \delta + \cos \frac{3}{2}\delta + \cos \frac{5}{2}\delta)$$

Dove si è usata nuovamente la formula di sottrazione del coseno. Usando questa relazione si possono verificare i risultati dei punti precedenti. **(35 punti).**

3. Cenno di soluzione alternativa per la terza domanda: utilizzando la notazione complessa, e posto  $E_1(\theta, t) = E_0 e^{iwt}$ , si ha  $E_2(\theta, t) = E_1(\theta, t) e^{-i\delta}$ ,  $E_3(\theta, t) = E_1(\theta, t) e^{-\frac{5}{2}i\delta}$ , da cui  $E(\theta, t) = E_0 e^{iwt} (1 + e^{-i\delta} + e^{-\frac{5}{2}i\delta})$  e si può calcolare  $|E(\theta, t)|^2 = E_0^2 (3 + 2(\cos \delta + \cos \frac{3}{2}\delta + \cos \frac{5}{2}\delta))$ .

### Soluzione problema 3.

1. Da considerazioni di simmetria si trova immediatamente che il vettore  $\vec{E}$  è radiale, dipende solo dalla distanza  $r$  dal centro e ha verso uscente. L'applicazione della legge di Gauss sul flusso del campo elettrico ad una superficie sferica di raggio  $r$  concentrica col nucleo fornisce

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

da cui

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}$$

La forza sull'elettrone vale dunque  $\vec{F}(r) = -q\vec{E}(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} = -\alpha \vec{r}$  dove abbiamo introdotto il parametro  $\alpha$  (dimensioni di una costante elastica) per comodità. Si tratta di una forza di richiamo armonica, perciò l'elettrone tende a stare al centro del nucleo. Il lavoro necessario a portare la particella dal centro alla superficie del nucleo è, in analogia col caso elastico,  $W_1 = \frac{\alpha}{2} R^2$ , dopodichè l'interazione tra nucleo e elettrone è uguale a quella tra due cariche puntiformi uguali e opposte e si ha che il lavoro per portare l'elettrone dalla superficie all'infinito è semplicemente  $W_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$  ( $-q$  per la differenza di potenziale  $V(\infty) - V(R) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ). In totale si ha

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{3q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

**(10 punti per il campo elettrico, 10 per posizione di equilibrio e calcolo di  $W$ )**

2. Dai calcoli precedenti risulta che il valore massimo del campo elettrico di richiamo si ha alla superficie e vale  $E_{\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ . Per  $E_0 \geq E_{\max} = E_+$  non è possibile avere situazioni di equilibrio stabile e l'elettrone verrà necessariamente strappato al nucleo e portato arbitrariamente lontano. Per  $E_0 < E_+/2$  si ha che l'elettrone non esce in nessun caso dal nucleo (nell'analogia col caso elastico, l'“elongazione massima” della molla è minore di quella di rottura); assumendo che un qualche tipo di dissipazione faccia fermare le oscillazioni dell'elettrone possiamo allora imporre l'equilibrio:  $-q\vec{E}_0 - \alpha\vec{\delta} = 0$

$$\vec{\delta} = -\frac{q}{\alpha}\vec{E}_0 = -\frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{q}\vec{E}_0$$

Osserviamo che per il vincolo posto su  $E_0$  si ha  $|\vec{\delta}| < R/2$ . **(5 punti per  $E_+$ , 5 per  $\vec{\delta}$ )**

3. Consideriamo separatamente un “gas di nuclei” e un “gas di elettroni”, e schematizziamo ciascuno di questi come una lastra di densità di carica uniforme  $\pm Nq$  (positiva e negativa rispettivamente); in assenza del campo esterno le due lastre sono esattamente sovrapposte lo spazio occupato dal gas risulta interamente neutro; una volta acceso il campo esterno, le due lastre si spostano l'una rispetto all'altra del microscopico intervallo  $\delta$  (che abbiamo visto essere minore di un raggio atomico). Allora lo spazio tra le armature del condensatore è interamente neutro eccetto che per due sottili fogli di spessore  $\delta$  e densità  $\pm Nq$ , che possiamo considerare di fatto come due piani con densità superficiale di carica  $\pm\sigma_p = \pm\delta Nq$ . Questa è la densità di carica superficiale di polarizzazione indotta. Essa produce nel condensatore un campo elettrico di modulo  $E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{\delta Nq}{\epsilon_0}$  (legge di Gauss) di direzione uguale a quella di  $\vec{E}_0$  e verso opposto. **(10 punti per l'idea di lastre sovrapposte, 5 per  $\sigma_p$ , 5 per  $E_p$ )**

4. Il campo totale nel condensatore vale allora

$$E_0 - E_p = E_0(1 - 4\pi NR^3) = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

da cui si deduce, notando che  $4\pi R^3 N = 3\frac{4}{3}\pi R^3 N = 3VN = 3\chi$  con  $V$  volume del singolo atomo,

$$\epsilon_r = \frac{1}{1 - 3\chi}$$

**(5 per la definizione di  $\epsilon_r$ , 5 per l'introduzione corretta di  $\chi$ )**

5. Le ipotesi di rarefazione del gas rendono legittima l'approssimazione  $\epsilon_r \simeq 1 + 3\chi$ , da cui coi dati forniti si ricava  $3\chi = \epsilon_r - 1 \sim 10^{-5}$ . Si ha allora

$$4\pi R^3 N \sim 10^{-5} \Rightarrow R^3 N \sim 10^{-6}$$

In condizioni standard di temperatura e pressione una mole di gas occupa un volume di circa 20 litri, cioè

$$N \sim \frac{6 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{-2} \text{m}^3} = 3 \cdot 10^{25} \text{m}^{-3}$$

Allora

$$R^3 \sim \frac{1}{3} 10^{-6-25} \text{m}^3 \sim 10^{-31} \text{m}^3$$

da cui si conclude  $R \sim 10^{-10} \text{m}$ , che è un dato compatibile con quelli reali (raggio atomico di Bohr  $a_0 \approx 0.5 \cdot 10^{-11} \text{m}$ ). **(5 punti per l'approssimazione all'inizio, 5 per il risultato compatibile con l'ordine di grandezza e per osservazioni sensate)**

6. Il potenziale di ionizzazione è il lavoro  $W$  calcolato al punto 1. Inserendo  $1/4\pi\epsilon_0 \sim 10^{10}\text{Nm}^2/\text{C}^2$ ,  $q^2 \sim 10^{-38}\text{C}^2$ ,  $R \sim 10^{-10}\text{m}$  si ricava

$$W \sim 10^{-18}\text{J} \sim 10\text{eV}$$

effettivamente dello stesso ordine di grandezza del potenziale di ionizzazione dell'atomo di idrogeno. Nonostante il modellino sia molto rozzo, fornisce risultati non irragionevoli. **(5 punti per la definizione di potenziale di ionizzazione e il recupero dell'espressione del punto 1, 5 per il risultato compatibile con l'ordine di grandezza e per osservazioni sensate)**

7. **(20 punti per la completezza della soluzione, 1 per ogni punto oltre 60)**