Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Olimpiadi di FISICA 2022

36ª edizione

Soluzione

Gara Nazionale
Prova Teorica

Senigallia (AN)
Venerdì 22 aprile 2022

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica

e-mail: `segreteria@olifis.it`
WEB: `www.olifis.it`

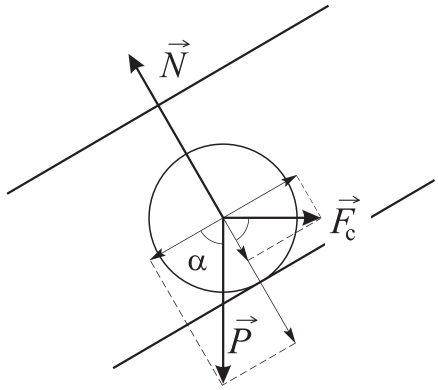
NOTA BENE

Le Olimpiadi di Fisica sono organizzate dall'AIF su mandato del MINISTERO DELL'ISTRUZIONE

PROBLEMA n. 1 – Un contagiri

Quesito n. 1.

Sulla pallina agiscono la forza peso $\vec{P}$ di modulo mg, diretta verticalmente e, poiché abbiamo adottato un sistema di riferimento non inerziale, la forza centrifuga $\vec{F}_c$ di modulo $m\omega^2 r$ diretta orizzontalmente verso l'esterno. L'equilibrio è possibile solo se la risultante di queste due forze ha la stessa direzione della forza vincolare $\vec{N}$ esercitata sulla pallina dalla parete del tubo, come mostrato in figura, dove la pallina è stata disegnata più grande per chiarezza.



Quindi, nella posizione di equilibrio si annulla la somma delle componenti parallele alla parete del tubo del peso e della forza centrifuga.

$$P_{\parallel} = -mg\cos\alpha$$

$$F_{c\parallel} = m\omega^2 r \operatorname{sen}\alpha$$

All'equilibrio si ha quindi

$$-mg\cos\alpha + m\omega^2 r_{\mathrm{e}} \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\mathrm{e}} = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\alpha}$$

Per discutere la stabilità consideriamo una posizione $r > r_{\mathrm{e}}$. La componente parallela della forza centrifuga, è più grande che nel punto di equilibrio mentre quella del peso resta invariata. Quindi la componente parallela all'asse della risultante è positiva e tende a far crescere ulteriormente r.

Analogamente, se $r < r_e$ la componente parallela all'asse della risultante è negativa e tende a far diminuire ulteriormente r. Quindi il punto di equilibrio è instabile.

Quesito n. 2.

Le forze di pressione che il liquido circostante esercita sulle basi del cilindretto in figura a sinistra (dove il cilindretto infinitesimo è mostrato ingrandito per chiarezza) hanno modulo

$$dF_1 = p(r,z)\,dA \quad \text{inferiormente e}$$

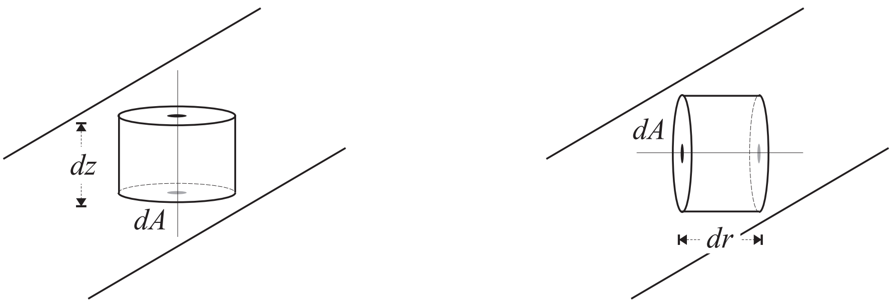
$$dF_2 = p(r,z+dz)\,dA \quad \text{superiormente}$$

per cui, tenuto conto del peso del volumetto di acqua, si ha equilibrio quando

$$dF_2 + \rho\,dA\,dz\,g - dF_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p(r,z+dz)\,dA + \rho\,dA\,dz\,g - p(r,z)\,dA = 0$$

Ne segue che

$$dp_z = p(r,z+dz) - p(r,z) = -\rho\,g\,dz$$



Quesito n. 3.

Per valutare la differenza di pressione tra due punti vicinissimi, posti alla stessa quota, consideriamo un cilindretto di liquido con l'asse parallelo all'asse r e le basi, di area dA, passanti per i punti citati, come in figura a destra. La forza che il liquido circostante esercita sulla base di coordinata r ha intensità

$$dF_1 = p(r,z)\,dA$$

mentre quella esercitata sulla base di coordinata $r + dr$ ha intensità

$$dF_2 = p(r+dr,z)\,dA$$

Sul cilindretto agisce anche la forza centrifuga, di modulo $\rho\, dA\, dr\, \omega^2\, r$ diretta orizzontalmente verso l'esterno. Nel sistema di riferimento scelto il liquido è in quiete quindi la somma delle tre forze deve essere nulla

$$p(r,z)\, dA + \rho\, dA\, dr\, \omega^2\, r - p(r+dr,z)\, dA = 0$$

per cui la differenza di pressione è

$$dp_r = p(r+dr,z) - p(r,z) = \rho\, \omega^2 r\, dr$$

Quesito n. 4.

La spinta idrostatica $\vec{S}$ che il liquido esercita sulla pallina è identica a quella che eserciterebbe su una sferetta di liquido di uguale volume V, posta nella stessa posizione, poiché tale forza deve equilibrare il peso e la forza centrifuga. Dal momento che la pallina è molto piccola, la forza si può considerare uniforme nel suo volume. Perciò si ha:

$$S_r = -\rho\, V \omega^2 r \quad \text{e} \quad S_z = \rho\, V g$$

Quesito n. 5.

Oltre alla forza peso e alla forza centrifuga sulla pallina agisce anche la spinta idrostatica $\vec{S}$. L'equilibrio è possibile solo in presenza di una reazione vincolare $\vec{N}$, che è perpendicolare alle pareti del tubo.

Detta $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_\mathrm{c} + \vec{S}$ la risultante del peso, della forza centrifuga e della spinta idrostatica, la pallina sarà in equilibrio se la componente parallela alla parete di questa forza risulta nulla.

Si calcola la componente parallela della spinta idrostatica

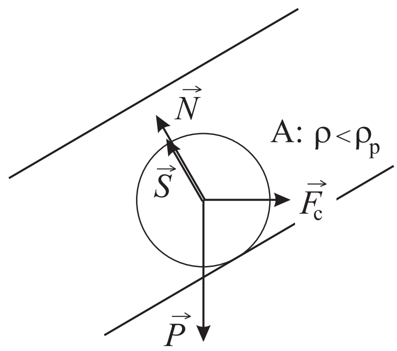
$$S_\parallel = S_z \cos\alpha + S_r \operatorname{sen}\alpha = \rho V g \cos\alpha - \rho V \omega^2 r \operatorname{sen}\alpha$$

La componente parallela della risultante è data quindi da

$$R_\parallel = -mg\cos\alpha + m\omega^2 r \operatorname{sen}\alpha + \rho V g \cos\alpha - \rho V \omega^2 r \operatorname{sen}\alpha = (\rho - \rho_\mathrm{p})\,(g\cos\alpha - \omega^2 r \operatorname{sen}\alpha)\, V$$

Essendo in questo caso $\rho \neq \rho_\mathrm{p}$, la posizione di equilibrio si ha per

$$g\cos\alpha - \omega^2 r \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\alpha} \overset{\mathrm{def}}{=} r_\mathrm{A}$$



Il modulo della somma vettoriale della forza peso, della forza centrifuga e della spinta idrostatica è proporzionale a $\rho - \rho_\mathrm{p}$. Nel caso $\rho < \rho_\mathrm{p}$ l'equilibrio è possibile solo quando la pallina è appoggiata alla parete inferiore, perché tale somma è diretta in basso a destra.

Come nel caso senza liquido, per $r > r_\mathrm{A}$ la componente parallela della forza risultante è diretta verso l'esterno, viceversa se $r < r_\mathrm{A}$ è diretta verso l'interno, quindi l'equilibrio è instabile.

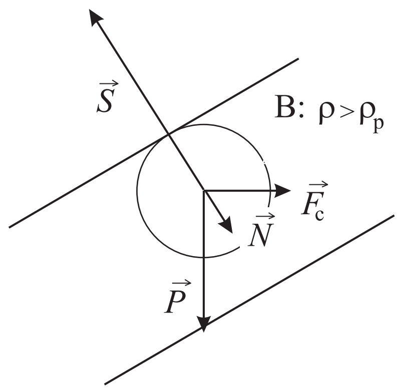
Nota: L'espressione $r_\mathrm{A} = g/(\omega^2 \operatorname{tg}\alpha)$ perde significato per $\alpha = 90°$ (tubo orizzontale). Se il tubo è disposto orizzontalmente ed è $\omega = 0$ la pallina è in equilibrio indifferente in qualunque posizione; se il tubo è orizzontale e ruotante la posizione di equilibrio è all'estremità del tubo più lontana dall'asse di rotazione, per qualunque valore di ω.

Quesito n. 6.

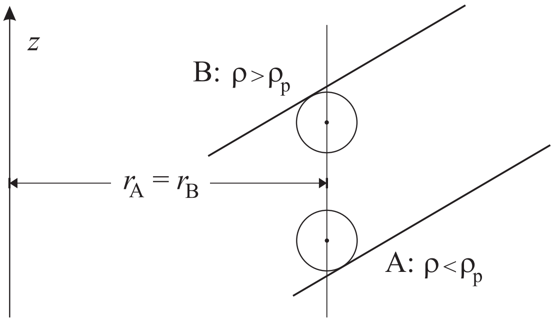
La somma delle tre forze, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_\mathrm{c} + \vec{S}$, ha in ogni punto la stessa espressione del caso precedente ma poiché $\rho > \rho_\mathrm{p}$, ha verso opposto. Anche in questo caso l'equilibrio è possibile solo grazie all'azione della forza normale $\vec{N}$, questa volta esercitata dalla parete superiore del tubo.

Nella posizione di equilibrio si ha, come prima,

$$r = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\alpha} \overset{\mathrm{def}}{=} r_\mathrm{B}$$



Il verso delle componenti parallele è opposto rispetto al caso precedente, quindi per $r > r_\mathrm{B}$ la risultante è diretta verso l'interno mentre $r < r_\mathrm{B}$ la risultante è diretta verso l'esterno. Quindi in questo caso l'equilibrio è stabile.



Quesito n. 7.

Vanno rappresentate le due posizioni una sopra all'altra, allo stesso valore della coordinata $r = r_A = r_B$, A appoggiata alla parete inferiore e B appoggiata alla parete superiore.

Quesito n. 8.

Affinché il dispositivo possa essere utilizzato come contagiri è necessario che, cambiando la frequenza e spostando quindi il punto di equilibrio, la pallina ne segua il movimento.

Questo è possibile solo in caso di equilibrio stabile, e quindi nel caso $\rho_p < \rho$.

Tenendo conto che le dimensioni della pallina sono trascurabili, i valori di velocità angolare che il dispositivo può misurare sono quelli per cui la posizione di equilibrio r_e soddisfa la relazione

$$r_e < L \operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}\alpha} < L \operatorname{sen}\alpha \quad \text{da cui} \quad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g \cos\alpha}{L \operatorname{sen}^2\alpha}}$$

Quindi la minima frequenza per cui il dispositivo può funzionare è

$$f_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g \cos\alpha}{L \operatorname{sen}^2\alpha}}$$

Nota: Approccio energetico (qualitativo)

Si consideri inizialmente il caso del tubo vuoto. Nel sistema di riferimento non inerziale rotante la forza centrifuga è proporzionale alla distanza r dall'asse di rotazione e come tale è una forza conservativa e può essere associata ad un'energia potenziale centrifuga $U_c = -m\omega^2 r^2/2$; infatti

$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = m\omega^2 r$$

In presenza del campo di gravità l'energia potenziale (totale) si scrive allora come

$$U = U_g + U_c = mg\,z - m\omega^2\,r^2/2 + U_0$$

essendo U_0 una costante arbitraria; scegliendo $U_0 = 0$, le superficie equipotenziali sono date da

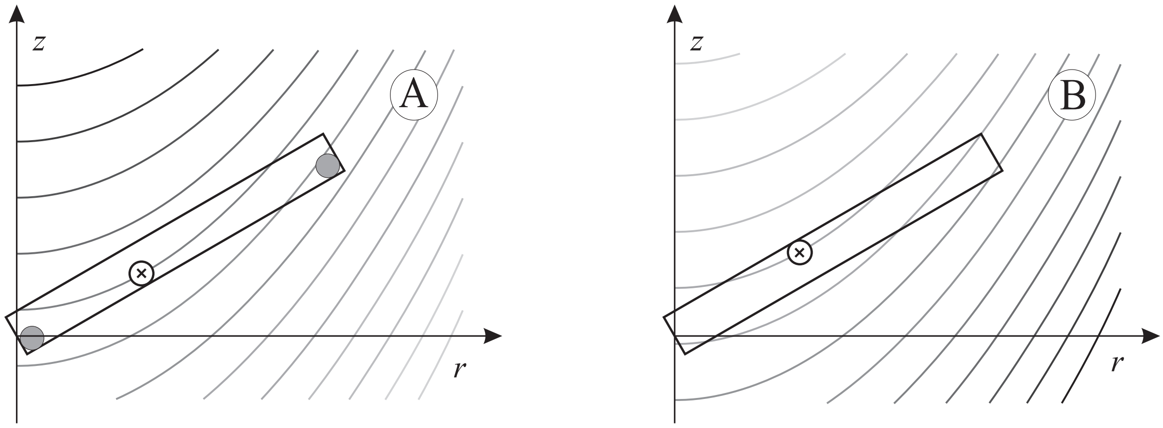
$$mg\,z - \frac{1}{2}m\omega^2\,r^2 = \overline{U} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\omega^2}{2g}\,r^2 + \frac{\overline{U}}{mg}$$

le cui intersezioni con il piano (r, z) sono parabole rivolte verso l'alto. I punti in cui la tangente alla parabola è parallela al tubo sono punti di equilibrio dato che la forza, perpendicolare alla linea equipotenziale, è anche perpendicolare alla parete liscia del tubo.

Nel caso in cui il tubo è riempito di liquido, per tener conto anche della spinta idrostatica si deve sostituire alla massa m la differenza tra la massa della pallina e quella nello stesso volume d'acqua $\Delta m = (\rho_p - \rho)\,V$ per cui le tracce delle superfici equipotenziali restano uguali a prima mentre, a seconda del segno di Δm, l'energia potenziale $U(r, z)$ cambia segno e, di conseguenza, i punti che sono di massimo in un caso diventano punti di minimo nell'altro caso e viceversa; anche la caratteristica di stabilità del punto di equilibrio si inverte.

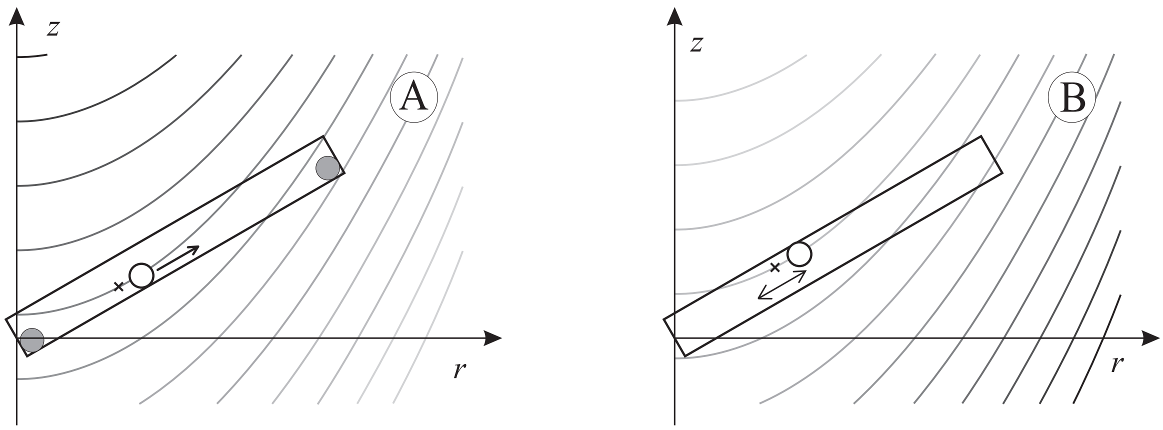
Nel caso $\rho = 0$ (assenza di liquido) e per $\rho < \rho_p$ (caso A: pallina "pesante") l'energia potenziale decresce con z o al crescere di r mentre nel caso opposto $\rho > \rho_p$ (caso B: pallina "leggera") l'energia potenziale decresce con r o al crescere di z. Nelle figure che seguono le curve equipotenziali sono tracciate con grigio sempre più chiaro al decrescere dell'energia potenziale U.

Come detto, i punti di equilibrio (indicati con una crocetta in figura) si avranno dove le linee equipotenziali sono parallele alla superficie del tubo, dalla parte dove l'energia potenziale sta decrescendo: le figure rendono evidente il fatto che nel caso A l'equilibrio è instabile perché è un punto di massimo tra i punti della parte inferiore del tubo mentre nei punti estremi del tubo l'energia potenziale è più bassa; dunque un piccolo spostamento porta la pallina in uno di questi due estremi; nel caso B invece il punto di equilibrio è stabile essendo quello di minimo assoluto dell'energia potenziale in tutto il volume del tubo.



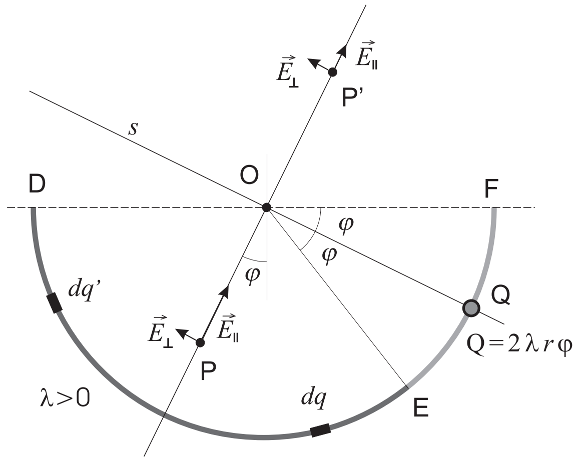
La geometria delle curve equipotenziali dipende dalla velocità angolare dato che il coefficiente del termine quadratico in r è proporzionale a ω^2; al crescere della frequenza di rotazione in ogni punto le curve hanno una pendenza maggiore e di conseguenza i punti di equilibrio si spostano verso l'asse di rotazione, come mostrato nelle successive figure; al contrario se la frequenza decresce.

Se il dispositivo deve essere usato come strumento di misura della frequenza di rotazione, occorre che il punto di equilibrio sia stabile in modo da "seguire" l'andamento della frequenza nel tempo. Questo si può avere solo nel caso B con la pallina "leggera" mentre nel caso A la pallina "pesante" si sposterà permanentemente in una delle estremità del tubo. Infine si può osservare che al diminuire della frequenza di rotazione la pallina "leggera" si sposta progressivamente verso l'esterno fino ad arrivare all'estremità del tubo; in queste condizioni la frequenza ha il valore minimo misurabile.



PROBLEMA n. 2 – Pendolo elettrostatico

Quesito n. 1.



Si divida la semicirconferenza carica DF in un arco DE simmetrico rispetto alla retta OP e un arco EF che risulta di ampiezza 2φ (in figura molto esagerato per chiarezza). Il campo prodotto in P e P' dall'arco DE, per simmetria, ha solo componente parallela a OP: basta considerare le due cariche dq e dq' disposte simmetricamente: i campi prodotti da queste hanno componente parallela uguale e componente perpendicolare opposta.

Quindi la componente normale è dovuta solo alle cariche sull'arco EF; per simmetria dei punti P e P$'$ rispetto alla retta s (perpendicolare a OP) questa è uguale, come si voleva dimostrare.

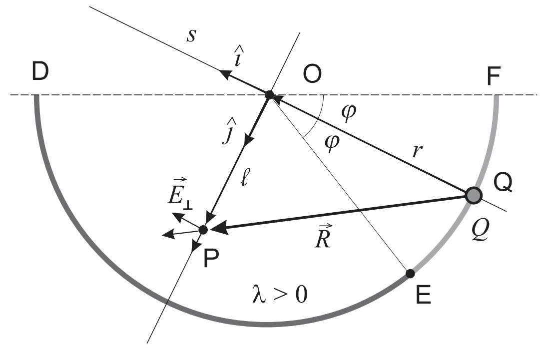
Quesito n. 2.

Se la carica q_1 è negativa la forza elettrostatica è attrattiva e dunque diretta verso il basso come la gravità. Il punto A è dunque di equilibrio (stabile) per il pendolo per qualunque valore della carica; se invece q_1 è positiva la forza elettrostatica è repulsiva e quindi opposta alla gravità; la condizione di equilibrio si ha solo se

$$q_1 E_\mathsf{A} < mg \quad \Rightarrow \quad q_1 < mg/E_\mathsf{A}$$

Questa relazione comprende in realtà entrambi i casi.

Quesito n. 3.



Nel quesito 1 si è visto che il campo $\vec{E}_\perp$ è prodotto dall'arco di carica EF; poiché è $\varphi \ll 1$ questa carica può essere vista come una carica puntiforme di valore $Q = 2\lambda r\varphi$, nel punto Q.

Sia $\vec{R}$ il vettore che dà la posizione di P rispetto a Q; definendo opportunamente i versori $\hat{\imath}$ lungo QO e $\hat{\jmath}$ lungo OP si ha

$\vec{R} = r\,\hat{\imath} + \ell\,\hat{\jmath}$ e il campo prodotto dalla carica Q si scrive

$$\vec{E}(Q) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{r\,\hat{\imath} + \ell\,\hat{\jmath}}{R^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_\perp = \frac{2\lambda\,r\,\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r\,\hat{\imath}}{\left(r^2+\ell^2\right)^{3/2}}$$

In definitiva

$$E_\perp = \frac{\lambda\,r^2\,\varphi}{2\pi\varepsilon_0\left(r^2+\ell^2\right)^{3/2}} = \alpha\,\varphi \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\lambda\,r^2}{2\pi\varepsilon_0\left(r^2+\ell^2\right)^{3/2}}$$

Quesito n. 4.

La forza di richiamo è data dalle componenti perpendicolari al filo della forza di gravità pari a $mg\,\mathrm{sen}\,\varphi \approx mg\varphi$, e della forza elettrica che per quanto visto sopra si può scrivere come $q_1\,E_\perp = \alpha\,q_1\varphi$. Essa si scrive come

$$f = -(mg - \alpha\,q_1)\varphi$$

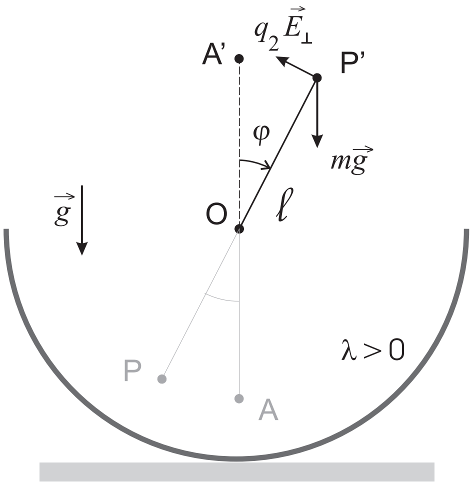
Quesito n. 5.

Poiché adesso la carica sul pendolo ha modulo doppio, la forza di richiamo in un intorno del punto A è diversa da prima e di conseguenza il periodo di oscillazione dovrebbe essere diverso da T.

Ne segue che il nuovo punto di equilibrio può essere solo il punto A$'$, simmetrico di A rispetto al centro O, con il pendolo in posizione capovolta; questo è possibile se la forza elettrica è in modulo maggiore del peso e diretta in verso opposto a questo, cioè repulsiva.

Questo secondo caso si può quindi realizzare solo se $q_2 > 0$.

Quesito n. 6.



Per quanto visto in risposta alla domanda 1, in un punto P′ simmetrico di P rispetto ad O, la componente $\vec{E}_\perp$ del campo elettrostatico è uguale a quella in P.

Indicando adesso con φ l'angolo A'OP', crescente in verso orario, e orientando ancora il verso positivo delle componenti tangenziali delle forze con quello di φ crescente, il contributo della forza elettrica si scrive come $-q_2E_\perp = -\alpha\, q_2$ mentre la gravità agisce con una componente positiva $mg\,\mathrm{sen}\,\varphi \approx mg\,\varphi$ essendo $\varphi \ll 1$. Ne segue che la forza di richiamo si scrive adesso

$$f = -(\alpha\, q_2 - mg)\varphi$$

Quesito n. 7.

L'equazione delle piccole oscillazioni attorno al punto A per una carica generica q si scrive

$$m\ell\ddot{\varphi} = -(mg - \alpha q)\,\varphi \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} + \frac{mg-\alpha q}{m\ell}\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} + \omega^2_{\mathsf{A}}(q)\,\varphi = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2_{\mathsf{A}}(q) = \frac{mg-\alpha q}{m\ell}$$

la cui soluzione è una funzione $\varphi(t)$ sinusoidale di periodo

$$T_{\mathsf{A}}(q) = \frac{2\pi}{\omega_{\mathsf{A}}(q)} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{mg-\alpha q}}$$

Per le oscillazioni intorno ad A′ si ha invece

$$m\ell\ddot{\varphi} = -(\alpha q - mg)\,\varphi \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} + \frac{\alpha q - mg}{m\ell}\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} + \omega^2_{\mathsf{A}'}(q)\,\varphi = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2_{\mathsf{A}'}(q) = \frac{\alpha q - mg}{m\ell}$$

da cui il periodo

$$T_{\mathsf{A}'}(q) = \frac{2\pi}{\omega_{\mathsf{A}'}(q)} = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha q - m\ell}{mg}}$$

In assenza di carica ($q = 0$) nelle oscillazioni attorno al punto A si ritrova ovviamente l'espressione del periodo del pendolo semplice

$$\omega^2_{\mathsf{A}}(0) = \omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \quad\Rightarrow\quad T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,.$$

mentre attorno ad A′ non si possono avere oscillazioni, dato che risulta

$$\omega^2_{\mathsf{A}}(0) = -\frac{mg}{m\ell} < 0$$

Un pendolo "normale" non può certo oscillare in posizione capovolta.

Si studiano quindi i due casi con q_1 positiva o negativa, imponendo la condizione che il periodo di oscillazione del pendolo con la carica q_1 attorno ad A sia uguale a quello con la carica q_2 attorno ad A′, ovvero

$$T_{\mathsf{A}}(q_1) = T_1 = T_2 = T_{\mathsf{A}'}(q_2) \quad \text{o, in modo equivalente,} \quad \omega^2_{\mathsf{A}}(q_1) = \omega^2_{\mathsf{A}'}(q_2)$$

Primo caso: $q_1 > 0$

Si pone $q_2 = 2q_1$ e si scrive

$$\frac{mg - \alpha q_1}{m\ell} = \frac{\alpha q_2 - mg}{m\ell} \quad\Rightarrow\quad mg - \alpha q_1 = 2\alpha q_1 - mg \quad\Rightarrow\quad \alpha q_1 = \frac{2}{3}mg$$

Sostituendo nella corrispondente espressione del periodo ($T_{\mathsf{A}}(q_1)$) risulta

$$T_{\mathsf{A}}(q_1 > 0) = 2\pi\sqrt{\frac{3\ell}{g}} = \sqrt{3}\,T_0 = T_+ = 1.732\,\mathrm{s}$$

Secondo caso: $q_1 < 0$

Come sopra ma con $q_2 = -2q_1$ perché q_2 deve essere comunque positiva. Si trova allora

$$\frac{mg - \alpha q_1}{m\ell} = \frac{\alpha q_2 - mg}{m\ell} \quad \Rightarrow \quad mg - \alpha q_1 = -2\alpha q_1 - mg \quad \Rightarrow \quad \alpha q_1 = -2mg$$

Sostituendo si ha

$$T_\mathsf{A}(q_1 < 0) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g}} = T_- = \frac{1}{\sqrt{3}}\,T_0 = 0.5774\,\mathrm{s}$$

PROBLEMA n. 3 – Ciclo termodinamico

Quesito n. 1.

Poiché gli stati A e B appartengono a una stessa adiabatica quasistatica, si ha:

$$p_\mathsf{A}\,V_\mathsf{A}^\gamma = p_\mathsf{B}\,V_\mathsf{B}^\gamma$$

da cui, con $\gamma = 5/3$,

$$p_\mathsf{B} = p_\mathsf{A}\,(V_\mathsf{A}/V_\mathsf{B})^\gamma = 0.105\,\mathrm{kPa}$$

Quesito n. 2.

L'equazione della retta che passa per i punti $(V_\mathsf{A}; p_\mathsf{A})$ e $(V_\mathsf{B}; p_\mathsf{B})$ è

$$p = \frac{p_\mathsf{B} - p_\mathsf{A}}{V_\mathsf{B} - V_\mathsf{A}}(V - V_\mathsf{A}) + p_\mathsf{A}$$

Da qui si ricava

$$m = (p_\mathsf{B} - p_\mathsf{A})/(V_\mathsf{B} - V_\mathsf{A}) = -0.155\,\mathrm{kPa\,dm^{-3}}$$

$$q = (p_\mathsf{A}V_\mathsf{B} - p_\mathsf{B}V_\mathsf{A})/(V_\mathsf{B} - V_\mathsf{A}) = 3.825\,\mathrm{kPa}$$

Quesito n. 3.

Dall'equazione di stato $pV = nRT$ e dalla $p = mV + q$ si trova che la temperatura assoluta T del gas nel tratto rettilineo del ciclo dipende dal volume secondo una relazione quadratica data da

$$nRT = mV^2 + qV$$

Essa ha un massimo nel punto X di ascissa

$$V_\mathsf{X} = -\frac{q}{2m} = 12.34\,\mathrm{dm^3}$$

e ordinata

$$p_\mathsf{X} = \frac{q}{2} = 1.912\,\mathrm{kPa}$$

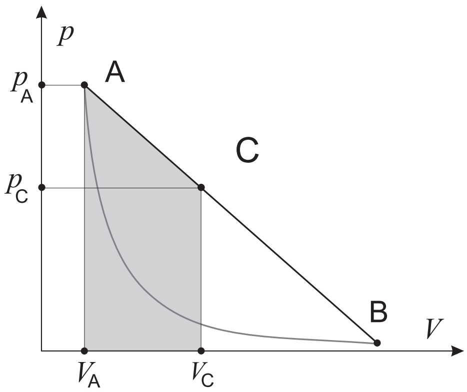
Durante la compressione adiabatica la temperatura aumenta sempre quindi la temperatura minima si raggiunge in B.

La temperatura è massima in X $(V_\mathsf{X}, p_\mathsf{X})$ e minima in B $(V_\mathsf{B}, p_\mathsf{B})$.

Quesito n. 4.

Soluzione I

Il calore viene scambiato dal sistema con l'ambiente solo durante l'espansione AB di equazione $p = mV + q$. Per il primo principio $Q = L + \Delta U$. Per ogni punto C dell'espansione AB, il lavoro eseguito nel tratto AC è numericamente uguale all'area del trapezio definito con le ascisse dai punti A= $(V_\mathsf{A}; p_\mathsf{A})$ e C= $(V_\mathsf{C}; p_\mathsf{C})$ e la variazione di energia interna del sistema è data da $\Delta U = nc_V\Delta T$. Dunque il calore scambiato nello stesso tratto è



$$Q_{\mathsf{AC}} = \frac{1}{2}\left(p_{\mathsf{A}} + p_{\mathsf{C}}\right)\left(V_{\mathsf{C}} - V_{\mathsf{A}}\right) + \frac{3}{2} nR\left(T_{\mathsf{C}} - T_{\mathsf{A}}\right) = \frac{1}{2}\left(p_{\mathsf{A}} + p_{\mathsf{C}}\right)\left(V_{\mathsf{C}} - V_{\mathsf{A}}\right) + \frac{3}{2} p_{\mathsf{C}} V_{\mathsf{C}} - \frac{3}{2} p_{\mathsf{A}} V_{\mathsf{A}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(mV_{\mathsf{A}} + q + mV_{\mathsf{C}} + q\right)\left(V_{\mathsf{C}} - V_{\mathsf{A}}\right) + \frac{3}{2}\left(mV_{\mathsf{C}} + q\right) V_{\mathsf{C}} - \frac{3}{2}\left(mV_{\mathsf{A}} + q\right) V_{\mathsf{A}} =$$

$$= 2mV_{\mathsf{C}}^2 + \frac{5}{2} qV_{\mathsf{C}} - 2mV_{\mathsf{A}}^2 - \frac{5}{2} qV_{\mathsf{A}} = 2m\left(V_{\mathsf{C}}^2 - V_{\mathsf{A}}^2\right) + \frac{5}{2} q\left(V_{\mathsf{C}} - V_{\mathsf{A}}\right)$$

L'espressione del calore scambiato dal sistema nella trasformazione AB è un polinomio di secondo grado in V_{C}. Nello stato Y$= (V_{\mathsf{Y}}, p_{\mathsf{Y}})$ con

$$V_{\mathsf{Y}} = -\frac{5q}{8m} = 15.42\,\mathrm{dm}^3$$

$$p_{\mathsf{Y}} = \frac{3}{8} q = 1.434\,\mathrm{kPa}$$

tale polinomio ha un massimo e quindi il sistema assorbe calore nel tratto AY e lo cede nel tratto YB.

È interessante osservare che nel tratto tra X e Y il sistema si sta raffreddando pur assorbendo calore; questo perché il flusso di energia entrante sotto forma di calore non copre interamente quello uscente sotto forma di lavoro.

Soluzione II

Per il primo principio della termodinamica, la quantità di calore scambiata in una trasformazione infinitesima è

$$\delta Q = p\,dV + dU = p\,dV + nc_V\,dT$$

dove c_V è il calore specifico molare a volume costante, che per un gas monoatomico vale $3R/2$. Dunque

$$\delta Q = p\,dV + \frac{3}{2} nR\,dT = p\,dV + \frac{3}{2}\,d(pV) = p\,dV + \frac{3}{2}(V\,dp + p\,dV) = \frac{5}{2} p\,dV + \frac{3}{2} V\,dp$$

Nella trasformazione AB abbiamo dunque

$$\delta Q = \frac{5}{2}(mV + q)\,dV + \frac{3}{2} mV\,dV = \left(4mV + \frac{5}{2} q\right) dV$$

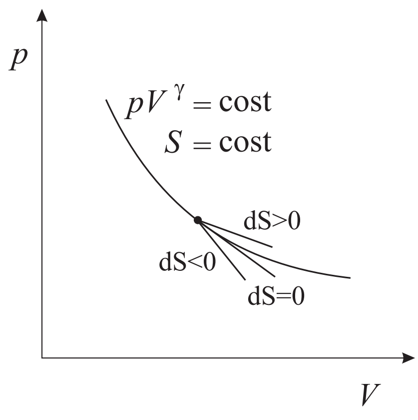
Il calore viene assorbito quando $\delta Q > 0$, dunque quando

$$4mV + \frac{5}{2} q > 0 \quad \text{ovvero, ricordando che } m < 0, \text{ quando} \quad V < -\frac{5q}{8m}$$

e si ottiene lo stesso risultato.

Soluzione III

In un'adiabatica quasistatica il sistema non assorbe calore e la sua entropia resta costante; in un'espansione il lavoro viene compiuto a spese dell'energia interna del sistema. Se, partendo da un generico stato, si compie una trasformazione infinitesima rappresentata, nel diagramma della funzione $p(V)$, da un trattino che sta sopra l'adiabatica passante per quello stato, significa che l'entropia del sistema è aumentata e dunque il sistema ha assorbito calore; viceversa, se il trattino sta sotto l'adiabatica, l'entropia del sistema è diminuita e quindi il sistema ha ceduto calore.



Nella trasformazione AB la pendenza ha valore costante m; pertanto il sistema assorbe calore finché questa pendenza è maggiore della pendenza dell'adiabatica passante per quello stato, $-\gamma\,p/V$.

$$m > -\frac{5p}{3V} = -\frac{5mV + 5q}{3V} \quad \Rightarrow \quad 8mV > -5q \quad \Rightarrow \quad V < -\frac{5q}{8m}$$

come sopra.

Quesito n. 5.

Il sistema assorbe calore da A a Y. Da Y a B il sistema cede calore, mentre da B ad A non c'è nessuno scambio di calore. Risulta quindi

$$Q_{\text{ass}} = Q_{\mathsf{AY}} = Q\left(V_{\mathsf{Y}}\right) = 2m\left(V_{\mathsf{Y}}^2 - V_{\mathsf{A}}^2\right) + \frac{5}{2}q\left(V_{\mathsf{Y}} - V_{\mathsf{A}}\right) = 47.8\,\mathrm{J}$$

La variazione di energia interna del gas in un ciclo è nulla perciò

$$L_{\text{netto}} = Q_{\text{scamb}} = Q_{\mathsf{AB}} = 2m\left(V_{\mathsf{B}}^2 - V_{\mathsf{A}}^2\right) + \frac{5}{2}q\left(V_{\mathsf{B}} - V_{\mathsf{A}}\right) = 25.04\,\mathrm{J}$$

Oppure, ricordando che in un'adiabatica $L = -\Delta U$, risulta

$$L_{\text{netto}} = L_{\mathsf{AB}} + L_{\mathsf{BA}} = \frac{1}{2}\left(p_{\mathsf{A}} + p_{\mathsf{B}}\right)(V_{\mathsf{B}} - V_{\mathsf{A}}) + \frac{3}{2}(p_{\mathsf{B}}V_{\mathsf{B}} - p_{\mathsf{A}}V_{\mathsf{A}}) = 25.04\,\mathrm{J}$$

Il rendimento risulta quindi

$$\eta = \frac{L_{\text{netto}}}{Q_{\text{ass}}} = 52.3\,\%$$

Quesito n. 6.

Risulta

$$T_{\max} = T_{\mathsf{X}} = \frac{1}{nR}\,p_{\mathsf{X}}V_{\mathsf{X}} = -\frac{1}{nR}\,\frac{q^2}{4m}$$

$$T_{\min} = T_{\mathsf{B}} = \frac{1}{nR}\,p_{\mathsf{B}}V_{\mathsf{B}}$$

Il rendimento di un ciclo di Carnot che opera tra queste temperature è

$$\eta_{\mathrm{C}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 + \frac{4m}{q^2}\,p_{\mathsf{B}}\,V_{\mathsf{B}} = 89.32\,\%$$