Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Olimpiadi di FISICA 2022

36ª edizione

Soluzione

Gara Nazionale
Prova Sperimentale

Senigallia (AN)
Giovedì 21 aprile 2022

UNA MOLLA SPECIALE

Quesito n. 0.

— **La molla** — Per ottenere la miglior precisione consentita dall'uso di un righello millimetrato si procede come segue. Ipotizzando, ragionevolmente, che il diametro del filo di acciaio armonico sia lo stesso da un'estremità all'altra della molla, si comprime quest'ultima in modo da ridurne al minimo la lunghezza, portando le spire a contatto tra loro. Si misura la lunghezza h della porzione di molla con le spire a contatto (si escludono cioè i ganci necessari per sospenderla e attaccarci il carico) e si conta il numero n di spire a contatto. Il rapporto $\phi = h/n$ fornisce la misura richiesta. Es. $h = (42 \pm 1)\,\text{mm}; n = 85\,\text{spire}; \phi = h/n = (42 \pm 1)\,\text{mm}/85 = (0.494 \pm 0.012)\,\text{mm}$.

Analogamente, si può confrontare il diametro esterno $2R$ delle spire con la scala millimetrata del righello, inserendo il righello tra le spire e cercando di apprezzare il massimo valore (diametro e non corda). Si ottiene, con grande precisione $2R = (22.0 \pm 0.5)\,\text{mm}$, per cui è $R = (11.0 \pm 0.3)\,\text{mm}$.

La misura indiretta (!) di ℓ si fa ponendo $\ell = 2\pi n(R - \phi/2)$, per cui è $\ell = (5.74 \pm 0.17)\,\text{m}$.

Quesito n. 1.

— **La costante elastica** — Alla base della modellizzazione adottata c'è l'ipotesi che si possa approssimare il comportamento della molla a quello di un altissimo numero N di minuscole molle in serie che oscillano tutte con lo stesso periodo T_M e con la stessa costante elastica $k' = Nk$. Sviluppando il modello, con l'ipotesi aggiuntiva che siano trascurabili gli effetti dell'attrito sul periodo di oscillazione, si ottiene la relazione (1) data nel testo.

Da $T_M = 4\sqrt{M/k}$ si ha $k = 16M/T_M^2$.

Fissato l'errore relativo su $k < 0.01$ e dato $\Delta M/M \approx 0.01/8.87 = 1.1 \times 10^{-3}$ deve risultare

$$\frac{\Delta T_M}{T_M} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2} \leq 0.005\,.$$

Misurando la durata di 30 oscillazioni si ottiene $t_{30} = 13.76\,\text{s}$. Per cui $T_M \approx 0.46\,\text{s}$.

Per raggiungere la precisione richiesta deve essere $\Delta T_M \approx 0.46\,\text{s} \cdot 0.005 = 0.0023\,\text{s}$.

Per valutare l'incertezza sulla misura del periodo si segue il metodo standard delle misure ripetute, misurando ogni volta il tempo t_{30} impiegato per 30 oscillazioni. Le misure ottenute sono riportate in tabella.

t_{30} (s)	scarto (s)
14.03	0.13
13.90	-0.00
13.80	-0.10
13.65	-0.25
14.05	0.15
13.98	0.08

Il valor medio è $\overline{t_{30}} = 13.9\,\text{s}$, lo scarto quadratico medio è di $0.154\,\text{s}$. Avendo fatto $N = 6$ misure indipendenti del tempo impiegato, l'errore sulla media risulta così di $0.154/\sqrt{6} = 0.06\,\text{s}$, pari a $0.4\,\%$.

Di qui si ottiene

$$T_M = (0.463 \pm 0.002)\,\text{s}, \quad k = (0.662 \pm 0.007)\,\text{N/m}\,.$$

Sono ovviamente accettabili soluzioni in cui, per ridurre l'incertezza percentuale, si sceglie di compiere un numero maggiore di oscillazioni.

Ad esempio, utilizzando una molla diversa ed impiegando 50 oscillazioni è stato ottenuto

t_{50} (s)
23.03
22.91
23.10
22.98
23.03

$$\overline{t_{50}} = (23.01 \pm 0.03)\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta t_{50}}{\overline{t_{50}}} = \frac{\Delta T_M}{T_M} \approx 0.0013 < 0.005 \quad \text{come richiesto.}$$

Segue: $T_M = (0.460 \pm 0.001)\,\mathrm{s}$ e inoltre

$$\frac{\Delta k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_M}{T_M}\right)^2} = 0.0045 < 0.01 \quad \text{come richiesto.}$$

Quindi

$$k = 16\frac{M}{T_M^2} = 0.6707\,\mathrm{N/m} \quad \text{e} \quad \Delta k = 0.003\,\mathrm{N/m}\,.$$

Infine

$$k = (0.671 \pm 0.003)\,\mathrm{N/m}\,.$$

Se calcoliamo l'errore sul tempo con la semidispersione e propaghiamo gli errori massimi, si ottiene

$$k = (0.671 \pm 0.006)\,\mathrm{N/m}$$

con errore relativo 0.009, che rispetta comunque il limite indicato.

Quesito n. 3.

— **Masse** — Con lo stesso modello e le stesse approssimazioni usate al punto precedente, si dimostra che, se alla molla si appende un carico di massa m, il rapporto fra il periodo di oscillazione T e il periodo T_M con cui oscilla la molla scarica dipende dal rapporto fra le masse m e M secondo la relazione (2) data nel testo.

Tabella di raccolta delle misure

rondelle	Numero di oscillazioni	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	t_{medio} (s)	$\pm\,\Delta t$ (s)	$\Delta T_{\%}$
1	50	40.25	40.23	40.18	40.22	$\pm\,0.035$	0.09
2	50	42.25	42.21	42.13	42.20	$\pm\,0.06$	0.10
3	50	47.49	47.50	47.51	47.50	$\pm\,0.01$	0.02
2+1	40	43.16	43.25	43.18	43.20	$\pm\,0.045$	0.08
3+1	40	46.52	46.53	46.55	46.53	$\pm\,0.01$	0.02
3+2	40	47.63	47.65	47.67	47.65	$\pm\,0.02$	0.04
3+2+1	40	54.62	54.67	54.73	54.67	$\pm\,0.055$	0.10

Tabella di elaborazione (periodi e masse).

Le masse sono state calcolate per

$T_M = (0.460 \pm 0.001)\,\mathrm{s}$.

rondelle	Periodo T (s)	Massa m (g)
1	0.8044	7.864
2	0.8440	8.990
3	0.9500	12.25
2+1	1.080	16.76
3+1	1.163	19.95
3+2	1.192	21.09
3+2+1	1.368	28.79

Quesito n. 3.

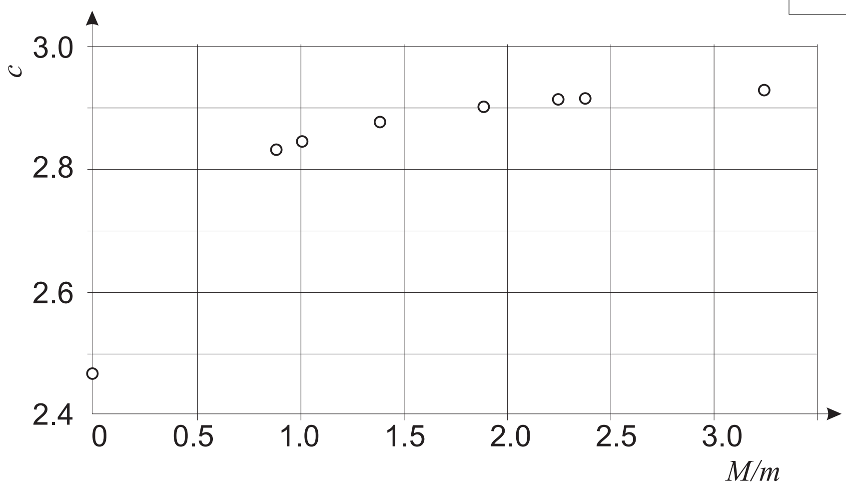
— **Periodi di oscillazione** —

La relazione da utilizzare per il calcolo di c è [1]

$$c = \left(\frac{kT^2}{4\pi^2 M} - \frac{m}{M}\right)^{-1} .$$

[1] Da questo punto in poi, i valori usati per le masse sono quelli ottenuti in risposta al quesito Q.2

rondelle	m/M	c
0	0	2.466
1	0.887	2.830
2	1.014	2.845
3	1.382	2.876
2+1	1.890	2.901
3+1	2.250	2.912
3+2	2.379	2.915
3+2+1	3.246	2.929



È interessante notare che dal confronto tra l'equazione (1) e l'equazione (3) si ha, per $m = 0$

$$T_M = 4\sqrt{M/k} = 2\pi\sqrt{M/(kc)} \quad \Rightarrow \quad 2 = \pi/\sqrt{c} \quad \text{da cui} \quad c = \pi^2/4 \approx 2.467\,.$$

Quesito n. 4.

— **Periodi di oscillazione** — La (4) può essere scritta come

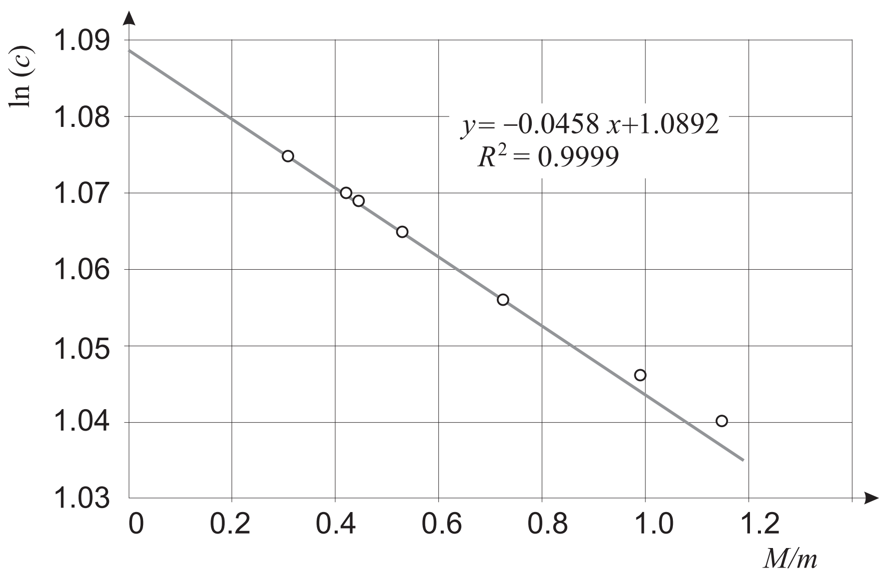
$$\ln(c) = \ln(a) + b\frac{M}{m}$$

in cui si riconosce l'andamento lineare se si dichiarano le seguenti variabili:

Variabile $x = M/m$ Variabile $y = \ln(c)$

Tabella

M/m	$\ln(c)$
1.144	1.040
0.986	1.046
0.724	1.056
0.529	1.065
0.444	1.069
0.420	1.070
0.308	1.075



Intervallo dei valori di M/m individuato (relativamente alla serie di misure riportata in questa soluzione): $M/m \le 0.724$.

Riferendosi anche ad altre misure si può concludere che, in generale, i punti risultano ben allineati per valori di $M/m \le 0.8$.

L'intercetta della retta a $M/m = 0$ fornisce il valore del logaritmo di a, quindi

$$a = e^{1.0892} = 2.97 \approx 3\,.$$

Questo è dunque il valore a cui tende c per grandi valori del rapporto m/M. Si ha, cioè

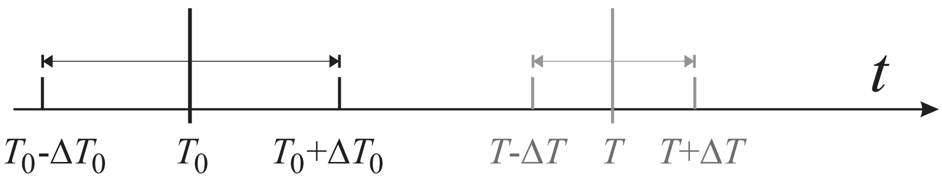
$$\lim_{M/m \to 0} a\, e^{bM/m} = a\,.$$

Il calcolo del parametro b si ottiene dalla pendenza della retta interpolatrice

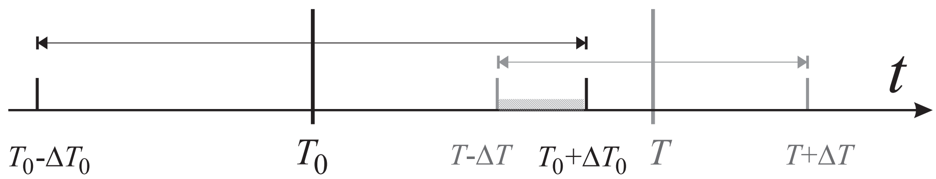
$$b = -0.0458\,.$$

Quesito n. 5.

— **Periodi di oscillazione** — Il valore di m al di sopra del quale si può trascurare il contributo della massa della molla nel calcolo del periodo previsto dipende dalle incertezze con cui si misurano le grandezze fisiche coinvolte. Si tratta quindi di stabilire per quale valore di m l'incertezza sul periodo T_0 calcolato con la relazione (5), produce un intervallo compatibile con quello del periodo T misurato. Il concetto è rappresentato in generale nel seguente schema



In particolare si ha compatibilità quando $T - \Delta T < T_0 + \Delta T_0$ come mostrato qui sotto



Poiché si ha

$$\Delta T_0 = T_0 \left[\frac{\Delta k}{2k} + \frac{\Delta m}{2m}\right] \quad \text{ne segue} \quad T - \Delta T < T_0 \left[1 + \frac{\Delta k}{2k} + \frac{\Delta m}{2m}\right]\,.$$

Nei casi che interessano è $m \gg M$ quindi nella relazione (3) si può porre $c \approx 3$.

Di qui si ottiene $T \approx T_0(1 + M/6m)$ e, con qualche passaggio algebrico,

$$\frac{2\Delta T}{T_0} > \frac{M}{3m} - \frac{\Delta m}{m} - \frac{\Delta k}{k}\,. \qquad (*)$$

Data la vicinanza fra i valori di T e di T_0, possiamo porre per semplicità $\Delta T/T_0 \approx \Delta T/T \approx 0.0065$ come ottenuto in risposta al quesito 2, da cui si ottiene, ipotizzando che Δm sia uguale all'incertezza con cui è nota la massa della molla[(2)]

$$m > \frac{M/3 - \Delta m}{2\Delta T/T_0 + \Delta k/k} = \frac{(0.00887/3 - 0.00001)\,\text{kg}}{2 \cdot 0.0065 + 0.003/0.671} = 0.169\,\text{kg}\,.$$

È facile rendersi conto che una massa simile farebbe allungare la molla di circa 2.5 metri !!!

---

(2) È interessante notare che il rapporto $\Delta T/T_0$, al contrario di $\Delta m/m$ e $\Delta k/k$, non è un errore relativo.

Quesito n. 6.

- Energia - La differenza $\Delta x = x_\mathrm{f} - x_0$ rappresenta sia il tratto di caduta del carico di rondelle appese alla molla (o dell'estremità della molla senza rondelle), che l'allungamento della molla. Le piccole differenze del valore di x_0 sono dovute alle diverse dimensioni delle rondelle appese alla molla.

È necessario notare che alla partenza la molla viene compressa di $2 \div 3$ mm rispetto alla sua lunghezza iniziale assunta quando è appoggiata orizzontale su un tavolo. L'ammontare di energia potenziale elastica in questa compressione è circa $4 \div 5$ ordini di grandezza più piccola rispetto alle variazioni di energia potenziale elastica che verranno misurate, per cui questo aspetto può essere trascurato.

Ipotesi adottate e formule utilizzate.

Le combinazioni di rondelle a disposizione sono: rondella 3; rondelle 1 e 2; rondelle 1 e 3; rondelle 2 e 3. La combinazione 1+2+3 non può essere impiegata perché una rondella deve essere comunque usata per tenere teso il nastro di carta.

L'osservazione del comportamento della molla mette in evidenza che la rondella torna quasi a sfiorare il traguardo dopo la terza semi oscillazione dalla partenza. Questo dettaglio suggerisce che l'energia meccanica del sistema si possa ritenere conservata durante la prima mezza oscillazione. La molla impiegata interviene nel bilancio energetico sia con la sua elasticità che con la sua massa per cui, indicando con $\Delta U_\mathrm{g} = mg\,\Delta x$ la variazione di energia potenziale gravitazionale del carico di rondelle e con $\Delta U_\mathrm{g,CdM} = Mg\,\Delta x_\mathsf{CdM}$ la variazione di energia potenziale gravitazionale del CdM della molla al termine della prima mezza oscillazione, per la conservazione dell'energia del sistema, si ottiene

$$\Delta U_\mathrm{el} + \Delta U_\mathrm{g} + \Delta U_\mathrm{g,CdM} = 0 \quad \text{da cui si ricava} \quad \Delta U_\mathrm{g,CdM} = -\Delta U_\mathrm{g} - \Delta U_\mathrm{el}$$

Di conseguenza il valore aspettato per Δx_CdM è

$$\Delta x_\mathsf{CdM} = \frac{|\Delta U_\mathrm{g,CdM}|}{Mg}$$

Usando per k il valore $0.671\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ottenuto in risposta al quesito 1 si ottiene la tabella seguente

rondelle	x_0 (mm)	x_f (mm)	Δx (mm)	ΔU_el (mJ)	ΔU_g (mJ)	ΔU_gCdM (mJ)	Δx_CdM (mm)
3	88	574	486	79.2	-58.4	-20.8	238
2+1	86	706	620	129.0	-102.0	-27.0	310
3+1	88	801	713	170.6	-139.6	-31.0	356
3+2	88	834	746	186.7	-154.3	-32.4	368

BIBLIOGRAFIA:

— Armstrong H. L., "The Oscillating Spring and Weight – An Experiment Often Misinterpreted", *American Journal of Physics*, vol. 34, n. 4, pag. 447-449, April 1969.

per provare a rifarlo...

Indicazioni sui materiali da procurarsi per ripetere l'esperienza:

Le molle sono state ordinate presso un mollificio (Mollificio Apuano Srl) specificando le seguenti caratteristiche

a) Molla a trazione con spire non precompresse
b) diametro del filo d'acciaio armonico: 0.5 mm
c) diametro spire: 22.2 mm
d) numero spire: 85

Le rondelle sono acquistabili in qualsiasi negozio di ferramenta o bricolage.

I nastri metrici di carta sono stati gentilmente forniti dall'Azienda IKEA.

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica
e-mail: **segreteria@olifis.it**
WEB: **www.olifis.it**

Le Olimpiadi di Fisica sono organizzate dall'AIF su mandato del MINISTERO DELL'ISTRUZIONE