Associazione per l'Insegnamento della Fisica

PROGETTO OLIMPIADI

33ª Edizione

Olimpiadi di Fisica 2019

Soluzione

Gara di Nazionale
Prova Teorica - Senigallia (AN)
Venerdì 12 Aprile 2019

PROBLEMA n. 1 – Pietre miliari 1: ...dedicato a Leonardo

Quesito n. 1.

Per i successivi quesiti 2 e 3 si deve misurare il raggio r del cilindro su cui è avvolta la fune, il braccio della manovella b e contare il numero N di denti della ruota dentata; non serve invece misurare il raggio della ruota dentata, né il passo della vite senza fine (elicoidale).

Il disegno schematico è stato tracciato importando la foto ingrandita in un programma di grafica; si riportano qui i dati, al centesimo di millimetro, forniti dal programma; le misure effettuate sul disegno, con un'incertezza della frazione di millimetro, non dovrebbero differire di più del 5 % da questi.

$N = 39$; $r = 9.31\,\text{mm}$; $b = 22.15\,\text{mm} = \beta\, r = 2.379\, r\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.26 \le \beta \le 2.50}$

Per l'ultima domanda servono invece le dimensioni della ruota dentata (1), della vite senza fine (2) e della manovella (3):

$$R_1 = 33.10\,\text{mm}; \qquad h_1 = (2\,R_1)/12 = 5.52\,\text{mm}$$
$$R_2 = 6.42\,\text{mm}; \qquad h_1 = 28.76\,\text{mm}$$
$$R_3 = 2.38\,\text{mm}; \qquad h_1 = 24.42\,\text{mm}\,.$$

In unità di r le misure si esprimono quindi così

$R_1 = \alpha_1\, r = 3.555\, r$; $h_1 = R_1/12 = \gamma_1\, r = 0.5925\, r$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.38 \le \alpha_1 \le 3.73}$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.563 \le \gamma_1 \le 0.622}$

$R_2 = \alpha_2\, r = 0.6896\, r$; $h_2 = \gamma_2\, r = 3.089\, r$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.655 \le \alpha_2 \le 0.724}$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.93 \le \gamma_2 \le 3.24}$

$R_3 = \alpha_3\, r = 0.2556\, r$; $h_3 = \gamma_3\, r = 2.623\, r\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.243 \le \alpha_3 \le 0.268}$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.49 \le \gamma_3 \le 2.75}$

Nota per la Commissione: Si richiede che i valori misurati (in unità di r) differiscano dai precedenti per meno del 5 %.

Quesito n. 2.

Ad ogni giro di manovella corrisponde l'avanzamento di un dente, quindi $1/N$ di giro della ruota dentata, per cui

$$d\ell : 2\pi b = dz : \frac{2\pi r}{N} \quad \text{cioè} \quad \frac{d\ell}{dz} = \frac{N\,b}{r}\,, \quad \text{quindi, con i valori di } r \text{ e } b \text{ trovati,} \quad \frac{d\ell}{dz} = 92.78\,.$$

In assenza di attrito il lavoro fatto dalla forza F applicata alla manovella (nella direzione del moto istantaneo di questa) va interamente ad aumentare l'energia potenziale della massa appesa, dunque

$$F\,d\ell = Mg\,dz \quad \Rightarrow \quad F = \frac{dz}{d\ell}\,Mg = \frac{M\,g\,r}{N\,b} = 0.01078\,Mg\,. \qquad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{0.0102 \le F/(Mg) \le 0.0113}$$

Per sollevare direttamente un oggetto, occorre una forza pari al suo peso; l'utilità della macchina consiste nel fatto che con questa è sufficiente applicare una forza inferiore al peso dell'oggetto.

Quesito n. 3.

Se F è la forza applicata alla manovella in un tempo dt, la potenza è $Fd\ell/dt$. Di questa una frazione $3/4$ va a finire in attriti, e $1/4$ per il sollevamento del corpo, $Mg\,dz/dt$, quindi

$$Mg\frac{dz}{dt} = \frac{1}{4}F\frac{d\ell}{dt}\,.$$

La macchina è "utile" se $F < Mg$, e quindi, poiché

$$F = 4Mg\frac{dz}{d\ell} = 0.04311\,Mg \qquad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{0.0410 \le F/(Mg) \le 0.0453}\,.$$

la macchina è utile.

Quesito n. 4.

Si tratta di stimare le dimensioni, quindi le masse e i momenti d'inerzia dei vari componenti e di calcolare le rispettive velocità angolari.

Se la massa si muove a velocità v, la velocità angolare del sistema (S_1) con la ruota dentata è $\omega_1 = v/r$, mentre il sistema della vite senza fine e manovella (S_2) ruota a velocità angolare $\omega_2 = N\omega_1 = Nv/r$.

I tre oggetti sono assimilabili a cilindri di raggio $R_i = \alpha_i r$, altezza $h_i = \gamma_i r, (i = 1, 2, 3)$, e densità ρ; il volume e la massa sono

$$\mathcal{V}_i = \pi R_i^2 h_i = \pi\alpha_i^2\gamma_i\,r^3; \qquad m_i = \mathcal{V}_i\rho = \pi\alpha_i^2\gamma_i,\rho\,r^3\,.$$

Per la ruota dentata $(i = 1)$ e la vite senza fine $(i = 2)$ il momento d'inerzia assiale è

$$\mathcal{I}_i = \frac{1}{2}m_i R_i^2 = \frac{1}{2}\pi\alpha_i^4\gamma_i\rho\,r^5$$

e l'energia cinetica si scrive

$$K_1 = \frac{1}{2}\,\mathcal{I}_1\,\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\pi\alpha_1^4\gamma_1\rho\,r^5\right]\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4}\pi\,\rho\,v^2\,r^3\,\left[\alpha_1^4\,\gamma_1\right]$$

$$K_2 = \frac{1}{2}\,\mathcal{I}_2\,\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\pi\alpha_2^4\gamma_2\rho\,r^5\right]\frac{N^2\,v^2}{r^2} = \frac{1}{4}\pi\,\rho\,v^2\,r^3\,\left[N^2\alpha_2^4\,\gamma_2\right]\,.$$

Invece, per come viene azionato il meccanismo, il moto della manovella è traslatorio puro: tutti i suoi punti si muovono in ogni istante con la stessa velocità $v_3 = \omega_2\,b$, perciò l'energia cinetica totale della manovella è semplicemente

$$K_3 = \frac{1}{2}\,m_3 v_3^2 = \frac{1}{2}\,m_3(\omega_2 b)^2 = \frac{1}{2}\,\pi(\alpha_3^2 r^2)(\gamma_3 r)\rho\,(\omega_2^2\beta^2 r^2) = \frac{1}{4}\,\pi\,\rho\,v^2\,r^3\,\left[2N^2\beta^2\,\alpha_3^2\,\gamma_3\right]\,.$$

Riassumendo:

$$K_i = \frac{1}{4}\pi\,\rho\,v^2\,r^3\,A_i \quad \text{e sarà sufficiente confrontare i termini adimensionali } A_i\text{:}$$

$$A_1 = \alpha_1^4\,\gamma_1$$

$$A_2 = N^2\alpha_2^4\,\gamma_2$$

$$A_3 = 2N^2\beta^2\,\alpha_3^2\,\gamma_3\,.$$

Raccogliendo i dati stimati e i calcoli in una tabella si ha

	Oggetto	α_i	γ_i	β	ω_i	A_i	[Intervallo]
1	Ruota dentata (corpo)	3.555	0.592	—	v/r	≈ 95	$70 \le A_1 \le 120$
2	Vite senza fine	0.689	3.089	—	Nv/r	≈ 1060	$790 \le A_2 \le 1330$
3	Manovella	0.256	2.623	2.379	Nv/r	≈ 2950	$2200 \le A_3 \le 3700$

Ne segue che la maggior energia cinetica è quella della manovella.

NOTA: in realtà si può osservare che il contributo dei denti all'inerzia della ruota dentata non è trascurabile; assimilandoli a cilindri, dai dati del disegno essi hanno una lunghezza (nella parte sporgente) pari a $\ell = 0.6165\,r$ e un raggio $r' = 0.1343\,r$. Il loro CdM sta a distanza $d = 3.864\,r$ dall'asse di rotazione. Si ottiene allora

$$m = \pi r'^2 \ell\rho \approx 1.11 \times 10^{-2}\,\rho r^3$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{12} m\ell^2 + md^2 = (\pi r'^2 \ell\rho)\left(\frac{1}{12}\ell^2 + d^2\right) \approx 0.1663\,\rho r^5$$

che per 39 denti fa circa $6.48\,\rho r^5$, mentre per il corpo della ruota dentata si era trovato

$$\mathcal{I} = \alpha_1^4 \gamma_1 \rho\, r^5 \approx 95\,\rho r^5\,.$$

L'insieme dei denti contribuisce quindi per circa il $6.4\,\%$ al momento d'inerzia della ruota dentata.

Come si vede, il momento di inerzia dei denti non è del tutto trascurabile rispetto a quello del disco ma in ogni caso tenerlo in considerazione non cambia significativamente i rapporti tra le energie cinetiche dei vari componenti che sono richieste. La scelta semplice di trascurarlo nell'analisi appare quindi giustificata e ha il vantaggio di diminuire la complessità del calcolo necessario.

PROBLEMA n. 2 – Pietre miliari 2: Il chilogrammo di Planck

Quesito n. 1.

Per determinare l'espressione del chilogrammo si consideri che la massa è data dal rapporto tra un'energia e una velocità al quadrato, pertanto, utilizzando come unità naturale per l'energia il prodotto $h\,\Delta\nu$ e per la velocità quella della luce, si ottiene

$$1\,\mathrm{kg} = \eta\,\frac{h\,\Delta\nu}{c^2}$$

Si calcola

$$\frac{h\,\Delta\nu}{c^2} = 6.77726531231207... \times 10^{-41}\,\mathrm{kg} \quad \text{da cui segue che} \quad \eta = 1.4755214... \times 10^{40}\,.$$

Nota: Poiché η è il risultato di operazioni aritmetiche tra numeri razionali noti esattamente (in particolare, numeri decimali finiti) il suo valore potrebbe essere espresso in termini esatti con il numero di cifre necessario a rappresentare il numero decimale periodico che si ottiene; in questo caso il numero di cifre da riportare non è determinato dai dati iniziali e dalle operazioni eseguite, ma solo dall'uso che se ne volesse fare successivamente. Per questo il risultato sarà considerato corretto indipendentemente dal numero di cifre scritte.

Con ragionamenti analoghi si può dimostrare che anche le unità di misura di altre grandezze fondamentali del SI, (per esempio l'ampere, il kelvin e la mole) possono essere scritte in termini delle costanti fondamentali.

$$1\,\mathrm{A} = 6.78968681725055... \times 10^{8}\ e\,\Delta\nu$$

$$1\,\mathrm{K} = 2.26666526460111...\ h\,\Delta\nu\,k^{-1}$$

$$1\,\mathrm{mol} = 6.02214076 \times 10^{23}\ N_A^{-1}\,.$$

Quesito n. 2.

La prima relazione è

$$[x\,p] = \mathsf{L} \times \mathsf{M\,L\,T}^{-1} = \mathsf{M\,L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$$

e queste sono, appunto, le dimensioni di un'energia per un tempo.

Le dimensioni del momento angolare L sono quelle di una lunghezza per una quantità di moto e quindi

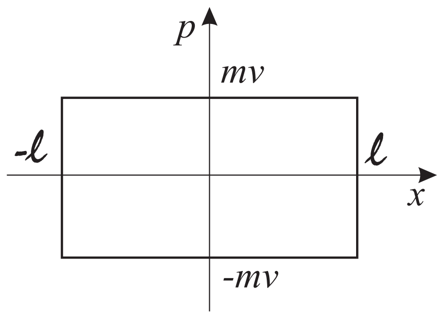
$$[L] = [x\,p] = \mathsf{M\,L}^2\,\mathsf{T}^{-1}\,.$$

Per la terza conviene ricordare che per la legge di Faraday-Neumann la variazione del flusso nell'unita di tempo è una f.e.m., quindi $[\Phi] = [\mathcal{E}\,t]$ e inoltre il prodotto di una f.e.m. per una carica è un'energia, per cui $[E] = [q\mathcal{E}]$; segue quindi che

$$[q\,\Phi] = [q\,\mathcal{E}\,t] = [E\,t] = \mathsf{M\,L}^2\,\mathsf{T}^{-2} \times \mathsf{T} = \mathsf{M\,L}^2\,\mathsf{T}^{-1}\,.$$

Quesito n. 3.

Si consideri la pallina che sta viaggiando dalla parete posta a $x = -\ell$ verso la parete posta a $x = +\ell$, in questo tratto la quantità di moto è costante e pari a $p = mv$, quindi nel grafico è un segmento parallelo all'asse delle posizioni. Nel rimbalzo sulla parete posta in $x = +\ell$ si inverte il segno della quantità di moto per cui la pallina ritorna verso la parete posta in $x = -\ell$ con quantità di moto $-mv$. Assumendo che la variazione della quantità di moto avvenga in uno spazio assolutamente trascurabile rispetto alla distanza delle pareti, il ciclo può essere descritto da un rettangolo di lati 2ℓ e $2mv$. L'azione A è l'area della regione limitata dal ciclo, quindi l'area del rettangolo di lati 2ℓ e $2mv$, per cui $A = 4\ell mv$.



Quesito n. 4.

Si trova

$$A = 16\,\frac{m\ell^2}{T} = 0.2\,\mathrm{J\,s} \quad \text{da cui} \quad n = \frac{A}{h} = 3.02 \times 10^{32}\,. \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{2.99 \le n \le 3.04 \quad [\,10^{32}\,]}$$

Di fatto non si può verificare che n è un numero intero, perché essendo un numero molto grande non è possibile fare misure con la precisione necessaria pari, in questo caso, ad almeno 32 cifre significative. Questo significa che non è di fatto possibile osservare gli effetti della quantizzazione dell'azione a queste scale e si può quindi considerare l'azione come una variabile continua.

Quesito n. 5.

Nel caso del protone

$$A = 4\,\ell\,p = 4\,\ell\,mv = 1.99 \times 10^{-33}\,\mathrm{J\,s} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{A}{h} \approx 3\,.$$

In questo caso l'azione non può essere vista come una variabile continua perché ha lo stesso ordine di grandezza di h, quindi non è più irrilevante la sua "granularità" e diventano rilevanti gli effetti della quantizzazione dell'azione.

Quesito n. 6.

Poiché ℓ è fissato e l'azione deve essere quantizzata, i valori della quantità di moto, e quindi della velocità, sono quantizzati.

$$v_n = \frac{h}{4\,\ell\,m}\,n\,.$$

Da qui si ricava che l'energia può assumere solo i valori

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{h^2}{32\,\ell^2\,m}\,n^2\,.$$

Si può anche esprimere l'azione direttamente in termini dell'energia E, eliminando v

$$A = 4\ell\sqrt{2mE} = nh\,.$$

Ottenendo naturalmente lo stesso risultato.

I livelli energetici del protone confinato fra le due pareti sono quindi quantizzati. L'energia del livello fondamentale è

$$E_1 = \frac{h^2}{32\ell^2 m} = 6.78 \times 10^{-24}\,\mathrm{J} = 4.23 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}$$

e le energie dei livelli superiori si ottengono moltiplicando questo valore per il quadrato di un numero intero positivo:

$$E_n = n^2\,E_1\,.$$

NOTA: il risultato è uguale a quello che si ottiene usando l'equazione del moto della meccanica quantistica per i livelli energetici di una particella nella buca di potenziale infinita.

Quesito n. 7.

Si ricava

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 3\,\frac{h^2}{32\,\ell^2 m} = 2.034\times10^{-23}\,\text{J} = 1.269\times10^{-4}\,\text{eV}$$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.02 \le \Delta E \le 2.05 \quad [\,10^{-23}\,\text{J}\,]}$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.26 \le \Delta E \le 1.28 \quad [\,10^{-4}\ \text{eV}\,]}$

Questo colloca la radiazione al di fuori dello spettro visibile in quanto le lunghezze d'onda comprese tra circa 400 e 750 nm corrispondono, tramite la relazione $E = hc/\lambda$, a energie di qualche elettronvolt ($1.7 \div 3.0$ eV).

Quesito n. 8.

Affinché un'onda sia stazionaria occorre che nell'intera lunghezza 2ℓ sia contenuto un numero intero di mezze lunghezze d'onda, cioè $2\ell = n\lambda/2$ con n intero positivo, quindi $\lambda = 4\ell/n$.

Dal valore quantizzato dell'energia si ottiene

$$p^2 = 2mE_n = \frac{h^2}{16\,\ell^2}n^2 \quad \text{da cui} \quad p = \frac{h}{4\,\ell}n = \frac{h}{\lambda}\,.$$

Si trova quindi la relazione di De Broglie $\lambda = \dfrac{h}{p}\,.$

NOTA: *Il problema è stato ispirato dal video "Introduzione alla fisica dei quanti", prof. Battimelli (Univ. Sapienza Roma):* `https://www.youtube.com/watch?v=ky-55xzuTeQ`

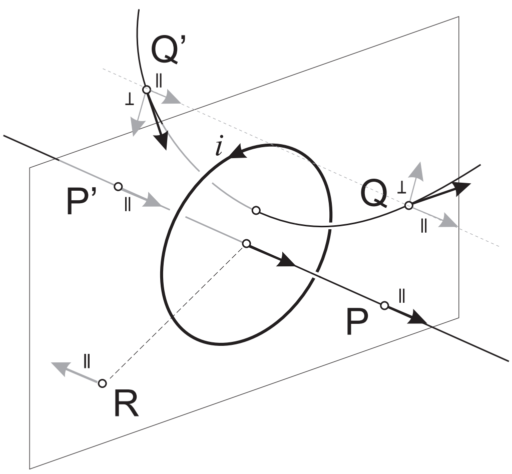
Vedere anche: `https://mathesisroma.files.wordpress.com/2013/03/sintesi-della-conferenza-di-g-battimelli.pdf`

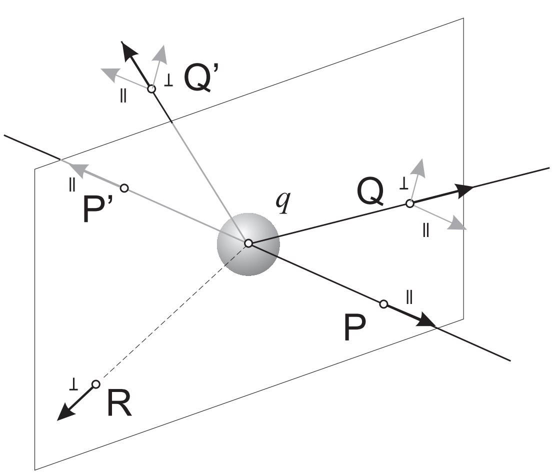
PROBLEMA n. 3 – Là, dove finisce il solenoide

Quesito n. 1.

Tracciando una linea di campo per i punti simmetrici Q e Q′, e denotando con $B_\parallel$ la componente di $\vec{B}$ parallela all'asse della spira e con $B_\perp$ quella perpendicolare$^{(\star)}$, si osserva che

$$B'_\perp = -B_\perp \quad \text{mentre} \quad B'_\parallel = B_\parallel\,.$$





$^{(\star)}$ Si faccia attenzione al fatto che, per un'opportuna coerenza con lo svolgimento successivo, nella formulazione del quesito i termini parallelo e perpendicolare sono stati riferiti all'**asse della spira** e non al piano di simmetria, come viene fatto di solito quando si studiano le proprietà di simmetria del campo.

Analogamente, scegliendo due punti P e P′ sull'asse si osserva che l'unica componente del campo magnetico, quella parallela all'asse, è la stessa nei due punti. Anche se non richiesto dal testo, si osserva che per un punto R appartenente al piano di simmetria e dunque simmetrico di se stesso, la componente perpendicolare all'asse deve annullarsi e resta solo quella parallela.

Le proprietà di trasformazione del campo magnetico tra i punti simmetrici rispetto al piano della spira si riassumono dicendo che il campo magnetico è una grandezza *pseudovettoriale* e non strettamente vettoriale.

Per confronto, nella figura a destra è mostrato il campo elettrostatico di una sferetta con carica q che presenta lo stesso piano di simmetria per riflessione; dunque, considerando un asse perpendicolare al piano e definendo le componenti di $\vec{E}$ come sopra, si ha

$$E'_\perp = E_\perp \quad \text{mentre} \quad E'_\parallel = -E_\parallel \,.$$

Nei punti P e P′ il campo elettrico è opposto, nel punto R appartenente al piano di simmetria la componente parallela all'asse è nulla e resta solo quella perpendicolare.

Quesito n. 2.

Detto A un punto qualsiasi dell'asse e $\vec{B}_\mathrm{A}$ il campo magnetico in A, si effettui una rotazione del sistema di un angolo qualsiasi intorno all'asse del solenoide.

Poiché la sorgente del campo magnetico e il punto A rimangono invariati, anche il campo $\vec{B}_\mathrm{A}$ deve rimanere inalterato. Se il campo $\vec{B}_\mathrm{A}$ avesse una direzione diversa da quella dell'asse del solenoide, esso non rimarrebbe invariato a seguito della rotazione, quindi l'unica direzione possibile è quella parallela all'asse.

Quesito n. 3.

Il piano mediano del solenoide è un piano di simmetria per il sistema. Per la proprietà del campo magnetico per sistemi simmetrici che è stata ricavata nella domanda 1, il campo magnetico in P e in P′ ha lo stesso valore. Pertanto $\vec{B}' = \vec{B}$.

Quesito n. 4.

Se il solenoide viene affiancato in P da un altro solenoide uguale al primo in modo da formare un unico solenoide lungo $2L$, il campo magnetico in P sarà uguale alla somma dei campi magnetici prodotti dal primo e dal secondo solenoide, che come dimostrato al punto precedente sono uguali.

In questo caso, il punto P diventa il centro di un solenoide lungo $2L$. Entrambi i solenoidi sono finiti ma $L \gg R$, quindi $2L \gg R$ e anche nel centro del solenoide doppio gli effetti di bordo sono trascurabili: il campo magnetico è indistinguibile da quello di un solenoide infinito e pari a $\mu_0(2N)i/(2L) = \mu_0 Ni/L = B_0$ dove N è il numero di spire del primo solenoide e naturalmente $2N$ quello del solenoide formato dai due uguali.

Di conseguenza il campo in P prodotto da un solo solenoide deve avere intensità $B_0/2$.

Quesito n. 5.

Il flusso magnetico Φ attraverso una superficie è definito dalla relazione

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B_\parallel ds = \frac{\pi}{2} R^2 B_0$$

(si ricorda che "parallelo" e "perpendicolare" si riferiscono all'asse del solenoide).

Nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che in tutti i punti della superficie si ha $B_\parallel = B_0/2$.

Per dimostrarlo si può seguire un ragionamento analogo a quanto riportato nei quesiti n. 3 e n. 4 come di seguito indicato.

Si consideri un punto D che si trova sulla sezione σ e il suo simmetrico rispetto al piano mediano D′. Dalle solite proprietà del campo magnetico di un sistema simmetrico si deduce che

$$B_\perp(\mathrm{D}') = -B_\perp(\mathrm{D}) \qquad (1)$$
$$B_\parallel(\mathrm{D}') = B_\parallel(\mathrm{D}) \,. \qquad (2)$$

Se, come nella risposta al quesito 4, il solenoide viene affiancato da un altro solenoide uguale al primo, in modo da formare un unico solenoide lungo $2L$, il campo magnetico in D sarà uguale alla somma dei campi magnetici prodotti dal primo e dal secondo solenoide.

Di nuovo, il punto D si viene a trovare nel piano mediano del solenoide lungo $2L$ e di nuovo il campo è indistinguibile da quello di un solenoide infinito, e quindi uniforme su tutta la sezione σ, di intensità B_0 e parallelo all'asse del solenoide.

Il campo del solenoide lungo $2L$ si ottiene come somma dei campi dei due solenoidi affiancati, quindi si deve avere

$$B_\perp(\mathrm{D}') + B_\perp(\mathrm{D}) = 0$$
$$B_\parallel(\mathrm{D}') + B_\parallel(\mathrm{D}) = B_0\,.$$

Utilizzando le proprietà di simmetria del campo magnetico (1) e (2) la prima condizione è immediatamente soddisfatta mentre la seconda diventa

$$2B_\parallel(\mathrm{D}) = B_0 \quad\Rightarrow\quad B_\parallel(\mathrm{D}) = B_0/2\,.$$

Quesito n. 6.

Si applichi il teorema di Gauss ad una superficie chiusa cilindrica avente per base la sezione σ e la sezione μ del solenoide contenuta nel piano mediano. Il flusso totale attraverso tale superficie è nullo e si ottiene come somma dei flussi attraverso le due basi e attraverso la superficie laterale.

$$\Phi_{\mathrm{tot}} = 0 = \Phi_\sigma + \Phi_\mu + \Phi_{\mathrm{lat}}\,. \quad \text{Il flusso } \Phi_\sigma \text{ vale} \quad \Phi_\sigma = \frac{\pi}{2}R^2B_0\,.$$

Il campo sul piano mediano è uniforme perché, essendo molto lontano dai bordi del solenoide, sul piano mediano il campo è indistinguibile a da quello di un solenoide infinito; il flusso Φ_μ vale quindi

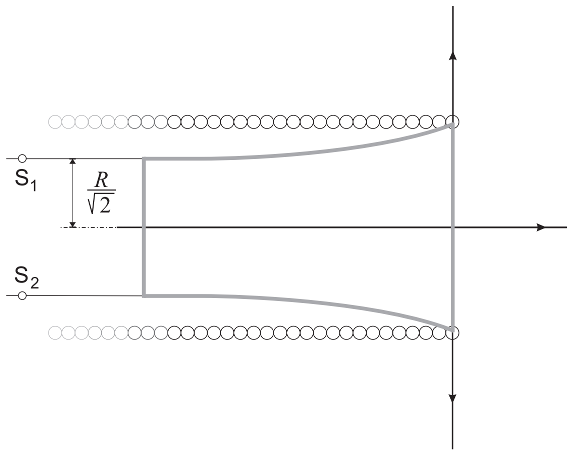
$$\Phi_\mu = -\pi R^2 B_0\,; \quad \text{di conseguenza si ha} \quad \Phi_{\mathrm{lat}} = -\Phi_\sigma - \Phi_\mu = \frac{\pi}{2}R^2B_0\,.$$

Quesito n. 7.

Si applichi il teorema di Gauss alla superficie che si ottiene ruotando le due linee di campo intorno all'asse del cilindro e chiusa dalla sezione σ e dall'opportuna porzione circolare del piano mediano.

Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo in quanto il campo è in ogni punto parallelo alla superficie. Il flusso totale attraverso le due superfici circolari poste su π e sul piano mediano deve perciò essere nullo. I due flussi hanno segni opposti, quindi basta uguagliare i valori assoluti. Detta $2R'$ la distanza tra i punti S_1 ed S_2, si deve cioè avere

$$\frac{\pi}{2}R^2B_0 = \pi R'^{\,2}B_0 \quad\Rightarrow\quad R' = \frac{R}{\sqrt{2}}\,.$$



Quesito n. 8.

Per costruire le linee di campo magnetico, si considerino i seguenti cinque punti.

1. Si tracciano le due linee di campo passanti per S_1 e S_2, indicando la distanza $R/\sqrt{2}$.

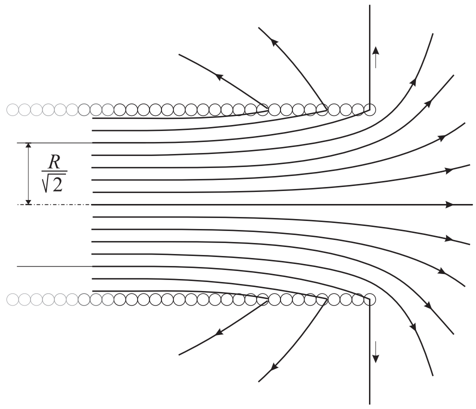
2. La linea di campo che passa per P deve essere coincidente con l'asse del cilindro.

3. Le linee di campo che passano per i punti di π fuori dal solenoide sono perpendicolari all'asse del solenoide. Per dimostrarlo, si utilizzi nuovamente la tecnica di prolungare il solenoide raddoppiandolo. Sia X un punto di π fuori dal solenoide, e $B_\parallel(\mathrm{X})$, la componente parallela all'asse (e quindi perpendicolare a π) del campo magnetico in X. La componente del campo parallela all'asse del solenoide prolungato, in X vale $2B_\parallel(\mathrm{X})$ e deve essere nulla. Quindi $B_\parallel(\mathrm{X}) = 0$

4. La componente del campo magnetico parallela all'asse del solenoide presenta una discontinuità pari a B_0 passando dall'interno all'esterno del solenoide. Pertanto poiché all'interno del solenoide tale componente è compresa tra $B_0/2$ e B_0 e diretta verso destra, appena fuori dal solenoide è compresa tra $-B_0/2$ e 0, ovvero è diretta verso sinistra. Le corrispondenti linee di campo magnetico dunque piegano verso sinistra.

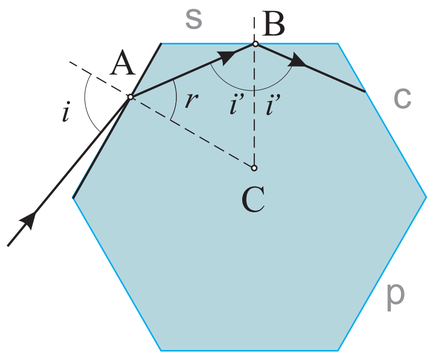
5. Fuori dal solenoide le linee hanno il classico andamento curvo. Per rappresentare in maniera sufficientemente chiara il campo magnetico, si stracciano, oltre alle linee citate, almeno 2 linee che escono da π e quattro che escono dalla superficie laterale del cilindro, rendendo evidente anche la simmetria delle linee rispetto all'asse del solenoide.

In conclusione un disegno qualitativo dell'andamento delle linee di campo può essere quello mostrato in figura.



PROBLEMA n. 4 – Luce dal ghiaccio: un alone per il Sole

Quesito n. 1.



I raggi che incidono dall'interno sulla faccia "s" possono emergere dal materiale solo se l'angolo di incidenza interna è minore dell'angolo limite i_{Lim}, che è una funzione dell'indice di rifrazione:

$$\operatorname{sen} i_{\text{Lim}} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad i_{\text{Lim}} = \operatorname{arcsen}\frac{1}{n}\,.$$

Ogni raggio incidente con angolo i, tale che l'angolo di incidenza i' alla superficie "s" sia maggiore dell'angolo limite, non può uscire da quella superficie, ma subisce una riflessione totale.

Considerando il triangolo ABC in figura si ha

$$r + i' + 60^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad i' = 120^\circ - r\,.$$

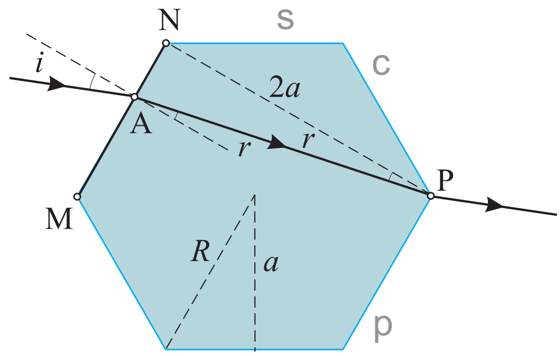
e dunque il valore minimo di i' si ha per il massimo di r quindi per il massimo di i dato che la funzione $r(i)$ è monotona crescente; il massimo valore di i è 90° cui corrisponde come angolo di rifrazione proprio l'angolo limite, per cui

$$i'_{\text{min}} = 120^\circ - i_{\text{Lim}}$$

$$i'_{\text{min}} > i_{\text{Lim}} \quad \Rightarrow \quad i_{\text{Lim}} < 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n_{\text{min}}} < \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{da cui} \quad n_{\text{min}} > \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.155\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.150 \le n_{\text{min}} \le 1.155}$

Quesito n. 2.



Fissato i si considera il particolare raggio che passa per il vertice P comune alle facce "p" e "c" e si determina in quale punto A ha attraversato la faccia d'ingresso. Il rapporto MA/MN determina la frazione di luce che passa per la faccia "p".

Detto R il raggio del cerchio circoscritto all'esagono ed a l'apotema (con $a = R\sqrt{3}/2$) si ha che

$$\overline{\mathrm{MN}} = R \quad \text{mentre} \quad \overline{\mathrm{AN}} = 2a \,\mathrm{tg}\, r$$

(r è l'angolo di rifrazione in ingresso.)

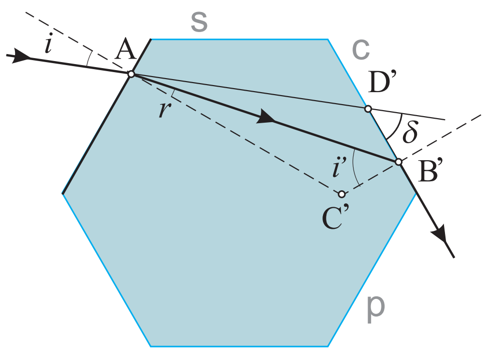
Usando la nota relazione trigonometrica

$$\mathrm{tg}\, r = \frac{\mathrm{sen}\, r}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 r}} = \frac{\mathrm{sen}\, i}{\sqrt{n^2-\mathrm{sen}^2 i}}$$

la frazione η cercata si scrive

$$\eta = \frac{\overline{\mathrm{MA}}}{\overline{\mathrm{MN}}} = 1 - \frac{\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{MN}}} = 1 - \frac{2a \,\mathrm{tg}\, r}{R} = 1 - \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, i}{\sqrt{n^2-\mathrm{sen}^2 i}}\,.$$

Quesito n. 3.



Per il ghiaccio, essendo $n = 1.310$, l'angolo limite risulta

$$i_{\mathrm{Lim}} = \mathrm{arcsen}\,\frac{1}{n} = 49.76°$$

Per qualunque angolo di incidenza non nullo ($i > 0$) ci sono dei raggi che vanno ad incidere dall'interno sulla faccia "c", ma se l'angolo i è troppo piccolo, per esempio molto prossimo a 0°, anche r lo è e l'angolo d'incidenza interna i' risulta poco inferiore a 60° e dunque maggiore dell'angolo limite: il raggio subisce riflessione totale.

Perché qualche raggio emerga dalla faccia "c" occorre che sia $i' < i_{\mathrm{Lim}}$.

Nel triangolo AB'C' si ha $r + i' + 120° = 180°$ ovvero $i' = 60° - r$ e, per avere raggi emergenti, occorre che sia

$$r > 60° - i_{\mathrm{Lim}} = r_{\mathrm{min}} = 10.24°\,.$$

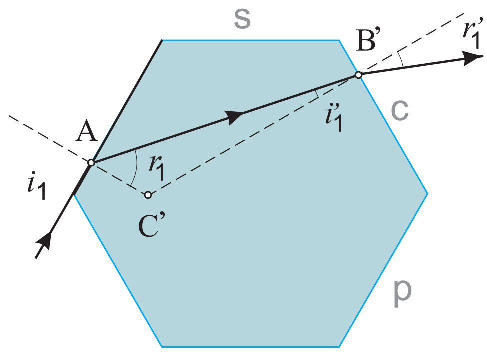
La legge della rifrazione dà il corrispondente angolo di incidenza:

$$\mathrm{sen}\, i_{\mathrm{min}} = n \;\mathrm{sen}\, r_{\mathrm{min}} \quad \Rightarrow \quad i_{\mathrm{min}} = \mathrm{arcsen}(n \;\mathrm{sen}\, r_{\mathrm{min}}) = 13.47°\,. \qquad \text{RIS} \;\Rightarrow\; \boxed{13.28 \le i_{\mathrm{min}} \le 13.64 \quad [\,°\,]}$$

Per questo valore limite si ha che $r' = 90°$ e l'angolo di deviazione risulta

$$\delta = (i-r) + (r'-i') = i + r' - (i'+r) = i + r' - 60° = 43.47°\,. \qquad \text{RIS} \;\Rightarrow\; \boxed{43.28 \le \delta \le 43.64 \quad [\,°\,]}$$

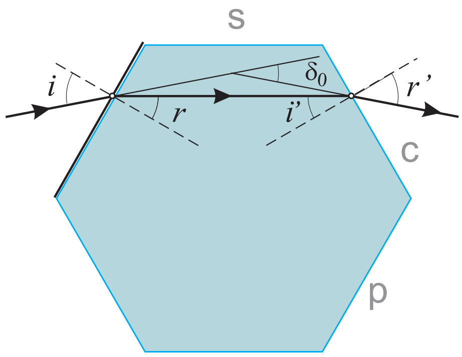
Quesito n. 4.



Per la proprietà di reversibilità, indicando adesso gli angoli con l'indice 1, basta esaminare la situazione simmetrica alla precedente, ovvero quella in cui

$$i_1 = r'_{\mathrm{max}} = 90°, \quad r'_1 = i_{\mathrm{min}} = 13.47° \quad \text{e} \quad \delta_1 = \delta = 43.47°\,.$$

Quesito n. 5.



Per simmetria, come visto sopra per i casi estremi, per ogni raggio con incidenza i e rifrazione esterna r' esiste un raggio con incidenza $i_1 = r'$ e rifrazione esterna $r'_1 = i$ che subisce la stessa deviazione δ. Il caso di massimo o minimo di δ deve essere quello simmetrico con se stesso, ovvero in cui $i = r'$. Di conseguenza $r = i' = 30°$ e quindi il tratto di raggio interno al cristallo deve essere parallelo alla faccia "s".

Ancora la legge della rifrazione dà

$$\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r = 0.655 \quad \Rightarrow \quad i_0 = i = r' = 40.92°$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{40.82 \le i_0 \le 41.02 \quad [\,°\,]}$

$$\Rightarrow \quad \delta_0 = i + r' - 60° = 2\,i_0 - 60° = 21.84°\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{21.64 \le \delta_0 \le 22.04 \quad [\,°\,]}$

δ_0 rappresenta un **minimo** della funzione $\delta(i)$ in quanto i valori trovati sopra erano maggiori di questo.

Quesito n. 6.

Ricordando che x e $y(x)$ rappresentano rispettivamente gli angoli i e $\delta(i)$, si è trovato che, in corrispondenza della deviazione minima ovvero per $x_0 = 40.92°$, risulta $y_0 = 21.84°$, dunque

$$a = \frac{y_0 - bx_0 - c}{x_0^2} = 8.418 \times 10^{-3}\,\text{gradi}^{-1}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{8.40 \le a \le 8.44 \quad [\,10^{-3}\,\text{gradi}^{-1}\,]}$

In alternativa, ricordando che la parabola che approssima la funzione $\delta(i)$ deve avere il vertice in x_0 basta porre

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-b}{2x_0} = 8.418 \times 10^{-3}\,\text{gradi}^{-1} \quad \text{come sopra.}$$

Per determinare l'errore di approssimazione si utilizza la funzione $\delta(i)$ fornita nel testo; prima, per completezza, si riporta il modo di ricavarla. Per questo si devono combinare le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} &\delta = i + r' - 60° &\qquad &\sin r = \sin i / n \\ &i' + r = 60° &\qquad &\sin r' = n\,\sin i'\,. \end{aligned}$$

Sostituendo r', usando la formula di sottrazione per la funzione seno, e ancora la relazione di Snell per sostituire r, si ha

$$\begin{aligned} \delta(i) &= i + \operatorname{arcsen}\left[n \operatorname{sen} i'\right] - 60° = i + \operatorname{arcsen}\left[n\left(\operatorname{sen} 60°\,\cos r - \cos 60°\,\operatorname{sen} r\right)\right] - 60° = \\ &= i + \operatorname{arcsen}\left[n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 r} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} r\right)\right] - 60° = i + \operatorname{arcsen}\left[n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2}} - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} i}{n}\right)\right] - 60° \end{aligned}$$

da cui infine si ottiene $\quad \delta(i) = i + \operatorname{arcsen}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} i\right] - 60°\,.$

Si effettua qui la verifica per i valori estremi dell'intervallo dato, immaginando che per tali valori la discrepanza dell'approssimazione dalla funzione sia massima; risulta

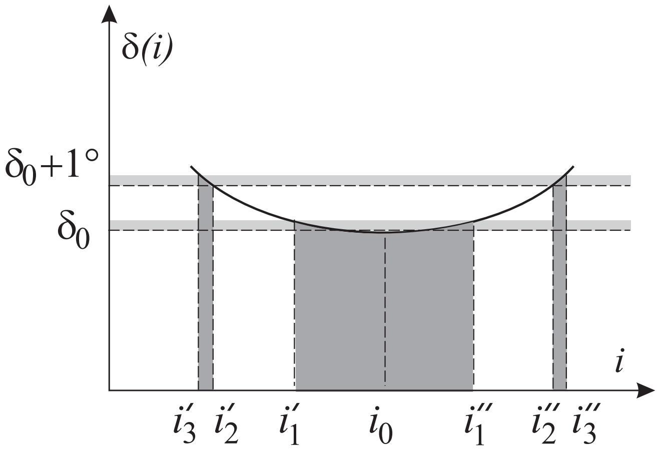
$$\begin{aligned} &i = x = 30°: \quad \delta(i) = 23.00° \quad y(x) = 22.84° \quad \Rightarrow \quad \frac{|y-\delta|}{\delta} \approx 0.7\,\% \\ &i = x = 55°: \quad \delta(i) = 23.41° \quad y(x) = 23.51° \quad \Rightarrow \quad \frac{|y-\delta|}{\delta} \approx 0.4\,\%\,. \end{aligned}$$

Nota per la commissione: è considerata corretta la verifica per due valori qualunque di i, non solo per quelli estremi.

Quesito n. 7.

Occorre invertire la relazione $\delta(i)$ per ottenere gli angoli di incidenza in corrispondenza del valori di deviazione $\delta_1 = \delta_0 + 0.01°$, $\delta_2 = \delta_0 + 1.0°$ e $\delta_3 = \delta_0 + 1.01°$.

$$i(\delta) = x(y) = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \,.$$



Sostituendo i valori numerici, si ricavano

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 21.85° &\Rightarrow\quad i'_1 &= 39.83° \quad \text{e} \quad i''_1 = 42.01° \\
\delta_2 &= 22.84° &\Rightarrow\quad i'_2 &= 30.02° \quad \text{e} \quad i''_2 = 51.82° \\
\delta_3 &= 22.85° &\Rightarrow\quad i'_3 &= 29.97° \quad \text{e} \quad i''_3 = 51.87° \,.
\end{aligned}$$

Il primo intervallo ha ampiezza

$$\Delta i_1 = i''_1 - i'_1 = 2.18°$$

mentre per il secondo occorre considerare, e sommare, gli intervalli

$$\Delta i'_2 = i'_2 - i'_3 = 0.05° \quad \text{e} \quad \Delta i''_2 = i''_3 - i''_2 = 0.05° \,.$$

Poiché la distribuzione delle orientazioni dei cristalli è uniforme, il rapporto tra il numero di cristalli è pari al rapporto richiesto delle ampiezze degli intervalli, ovvero

$$\rho = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\Delta i_1}{\Delta i'_2 + \Delta i''_2} \approx 22 \,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{\rho \geq 18}$

Quesito n. 8.

Poiché δ_0 è un minimo, non ci sono cristalli che deviano la luce per angoli minori, dunque il cielo appare più scuro a distanze minori dal Sole mentre, spostandosi verso l'esterno solo di 1° dall'angolo δ_0, il numero di cristalli decresce rapidamente e anche l'intensità della luce deviata è molto minore; questo spiega l'apparire dell'alone luminoso alla distanza angolare δ_0 dal Sole.

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica
e-mail: segreteria@olifis.it
WEB: www.olifis.it

Le Olimpiadi di Fisica sono organizzate dall'AIF su mandato del
MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA