PROGETTO OLIMPIADI

2016

Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Olimpiadi di Fisica

30ª Edizione

Gara Nazionale
Prova Teorica
Venerdì 15 Aprile 2016

Soluzioni

SOLUZIONI

PROBLEMA n. 1 – Lo stucco nel secchiello

Quesito n. 1.

Sul blocco agiscono il peso del blocco $\vec{P}_\mathrm{b}$, di modulo Mg, la forza normale $\vec{N}$, la tensione $\vec{T}_2$ e l'attrito $\vec{A}$.

Sul secchiello agiscono il peso $\vec{P}_\mathrm{s}$, di modulo $m_1 g$, e la tensione $\vec{T}_1$.

Il fatto che la carrucola sia libera di ruotare senza attrito e che il filo abbia massa trascurabile, ci assicurano che $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ abbiano lo stesso modulo, che indicheremo con T.

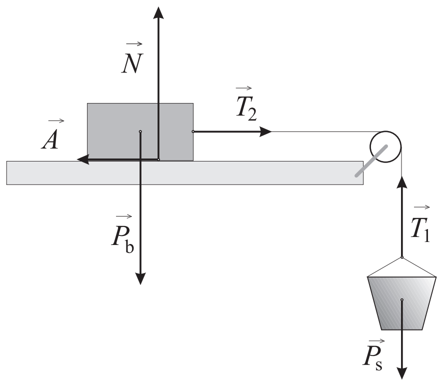
La condizione di equilibrio del secchiello è allora

$$T = m_1 g\,.$$

Per quanto riguarda il blocco, le condizioni di equilibrio verticale e orizzontale si scrivono

$$N = Mg \qquad\qquad A = T\,.$$

Dalla prima e dalla terza relazione si ricava che la forza di attrito statico necessaria a tenere il sistema in equilibrio è



$$A = m_1 g = 8.34\,\mathrm{N}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{8.32 \le A \le 8.35 \quad [\mathrm{N}]}$

Per vedere se questa condizione può essere soddisfatta, si confronta questo valore con la forza di attrito statico massimo

$$A_\mathrm{max} = \mu_\mathrm{s}\, N = \mu_\mathrm{s}\, Mg = 20.5\,\mathrm{N}\,.$$

Quindi l'attrito necessario a mantenere il sistema in equilibrio è ampiamente inferiore al massimo consentito; dunque il sistema è effettivamente in equilibrio e l'attrito ha modulo $m_1 g = 8.34\,\mathrm{N}$.

Quesito n. 2.

Per l'equilibrio del secchiello, la tensione deve in ogni istante equilibrare la forza F più il peso del secchiello

$$T(t) = F(t) + m_1 g\,.$$

Per l'equilibrio del blocco, l'attrito statico deve in ogni istante equilibrare la tensione

$$A(t) = T(t)\,.$$

Affinché l'equilibrio del sistema sia possibile, il valore di picco dell'attrito statico, $A_\mathrm{p} = T_\mathrm{p} = F_\mathrm{p} + m_1 g$, dev'essere minore dell'attrito massimo. In definitiva

$$F_\mathrm{p} + m_1 g < \mu_\mathrm{s} M g\,. \qquad (1)$$

Per il terzo principio della dinamica, $F(t)$ è anche l'intensità della forza che il secchiello esercita sulla palla. Applicando il teorema dell'impulso alla palla, si ha

$$\int_0^{\Delta t}(F - m_2 g)\,dt = m_2 v - 0 \quad \Rightarrow \quad <F>\Delta t - m_2 g\,\Delta t = m_2 v$$

$$<F>\Delta t = \alpha F_\mathrm{p}\,\Delta t = m_2 v + m_2 g\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{p} = \frac{m_2\,(v + g\,\Delta t)}{\alpha\,\Delta t}\,.$$

Sostituendo questa espressione nella (1) si ottiene che per mantenere l'equilibrio del sistema l'urto dovrebbe avere una durata

$$\Delta t > \frac{m_2 v}{g(\alpha\mu_\mathrm{s} M - \alpha m_1 - m_2)} = 0.82\,\mathrm{s}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.79 \le \Delta t \le 0.86 \quad [\,\mathrm{s}\,]}$

È chiaro che l'urto non può avere questa durata; basti pensare che il centro di massa della palla, con una velocità media dell'ordine di $v/2$, percorrerebbe in questo tempo più di un metro e mezzo. Questo fa capire chiaramente che, con questi valori delle masse, il sistema non può restare in equilibrio in seguito all'urto.

Quesito n. 3.

Se l'urto può essere considerato istantaneo, la condizione precedente non è evidentemente soddisfatta e di conseguenza blocco e secchiello si mettono in moto. La velocità del blocco subito dopo l'urto è, in modulo, uguale a quella del secchiello perché il filo è inestensibile. Fissato verso il basso l'orientamento dell'asse verticale, considerando il sistema formato da palla e secchiello e trascurando le forze non impulsive dato che l'urto è istantaneo, il teorema dell'impulso dà

$$J_1 = m_2 v - (m_1 + m_2)V\,.$$

dove J_1 è il modulo dell'impulso esercitato dalla tensione T_1 durante l'urto.

Poiché filo e carrucola hanno massa trascurabile, le tensioni T_1 e T_2 hanno la stessa intensità anche durante l'urto e quindi l'impulso J_2 della tensione T_2 ha la stessa intensità di J_1. Coerentemente con la scelta fatta, si orienta verso destra l'asse orizzontale. Applicando il teorema dell'impulso al blocco si ha allora

$$J_2 = MV\,.$$

Uguagliando i moduli dei due impulsi si ottiene

$$V = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2 + M} = 0.554\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.551 \le V \le 0.557 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

Quesito n. 4.

Dopo l'urto, il blocco scivola sul piano d'appoggio e l'attrito è quindi dinamico. Il suo modulo è allora

$$A' = \mu_\mathrm{d} N = \mu_\mathrm{d} M g\,.$$

dato che vale ancora la relazione $N = Mg$. Le due tensioni saranno ancora uguali in modulo, ma quest'ultimo avrà un valore diverso rispetto a prima e sarà indicato con T'.

Con gli assi orientati come nel punto precedente, la seconda legge della dinamica applicata rispettivamente al secchiello con la palla e al blocco si scrive

$$(m_1 + m_2)\,g - T' = (m_1 + m_2)\,a$$

$$T' - \mu_\mathrm{d} M g = Ma\,.$$

Sommando membro a membro queste due relazioni si ottiene

$$a = \frac{(m_1 + m_2 - \mu_\mathrm{d} M)\,g}{m_1 + m_2 + M} = -0.99\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{-1.02 \le a \le -0.96 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,]}$

Il segno negativo dice che le accelerazioni sono rivolte in verso contrario a quello del sistema di riferimento scelto; in altre parole, blocco e secchiello rallentano.

Quesito n. 5.

Siano $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ le forze esercitate dalla catena rispettivamente sul secchiello e sul blocco. Stavolta le due forze, in condizioni di non equilibrio, non hanno lo stesso modulo, perché la massa della ruota dentata non è trascurabile. Anche in questo caso le velocità e le accelerazioni del secchiello e del blocco sono uguali, in modulo, perché la catena è inestensibile. Per il teorema dell'impulso applicato al sistema formato da secchiello e palla di stucco, il modulo J_1' dell'impulso di F_1 è

$$J_1' = m_2 v - (m_1 + m_2)V' . \tag{2}$$

Applicando il teorema dell'impulso al blocco si ha

$$J_2' = MV' . \tag{3}$$

Nell'urto, la forza $\vec{F}_1$ trasferisce alla ruota dentata un impulso angolare di modulo $J_1'R$, dove R è il raggio della ruota; analogamente, la forza $\vec{F}_2$ imprime alla ruota un impulso angolare di modulo $J_2'R$ e di verso opposto al precedente. Per la seconda equazione cardinale della dinamica si ha allora

$$J_1'R - J_2'R = I\omega . \tag{4}$$

dove I è il momento d'inerzia della ruota dentata e ω è la sua velocità angolare subito dopo l'urto. Per quanto detto nel testo, il momento d'inerzia si può considerare uguale a quello di un disco omogeneo attorno al proprio asse

$$I = \frac{1}{2} m_3 R^2 . \tag{5}$$

Inoltre la velocità angolare è legata a quella del secchiello e del blocco dalla relazione cinematica

$$\omega = \frac{V'}{R} \tag{6}$$

perché la catena è incastrata nella ruota dentata. Sostituendo nella (4) le espressioni (2), (3), (5) e (6) si ottiene

$$V' = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2 + m_3/2 + M} = 0.510\,\mathrm{m\,s^{-1}} .$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.507 \le V' \le 0.513 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

Quesito n. 6.

Applicando la seconda legge della dinamica rispettivamente al secchiello e al blocco si ottengono le relazioni

$$(m_1 + m_2)\,g - F_1 = (m_1 + m_2)\,a' \tag{7}$$
$$F_2 - \mu_\mathrm{d} M\,g = Ma' . \tag{8}$$

La seconda equazione cardinale della dinamica applicata alla ruota dentata si scrive

$$F_1 R - F_2 R = I\alpha'$$

dove α' è l'accelerazione angolare della ruota dentata, che è legata ad a' dalla relazione cinematica $\alpha' = a'/R$; pertanto la relazione precedente diventa

$$F_1 - F_2 = {}^1\!/_2\, m_3 a' . \tag{9}$$

Sostituendo le espressioni delle forze ricavate dalle (7) e (8) nella (9) e risolvendo si ottiene infine

$$a' = \frac{(m_1 + m_2 - \mu_\mathrm{d} M)\,g}{m_1 + m_2 + m_3/2 + M} = -0.91\,\mathrm{m\,s^{-2}} .$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{-0.93 \le a' \le -0.89 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,]}$

PROBLEMA n. 2 – Da lontano verso il solenoide

Quesito n. 1.

Il modulo del campo magnetico è $B_{\rm int} = \mu_0 nI$; assumendo che sia uniforme, il flusso è $\Phi_{\rm int} = S\,B_{\rm int}$ con $S = \pi R^2$, da cui $\Phi_{\rm int} = \pi\mu_0 R^2\, nI$.

Quesito n. 2.

Si consideri una superficie emisferica di raggio ρ il cui centro sia nel punto centrale del solenoide, chiusa con un cerchio di uguale raggio posto sul piano π. Facendo tendere ρ all'infinito l'area della superficie cresce come ρ^2 mentre il modulo del campo magnetico decresce come ρ^{-3} dal momento che a grande distanza il campo del solenoide può essere approssimato come quello di un dipolo magnetico; di conseguenza il flusso sulla superficie emisferica tende a zero.

Poiché, per il teorema di Gauss, il flusso del campo $\vec{B}$ attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo, si deduce che anche il flusso magnetico attraverso l'intero piano π è nullo; dunque

$$\int\limits_{S(\pi)} \vec{B}\cdot\hat{n}\; ds = \Phi_{\rm int} + \Phi_{\rm est} = 0 \quad\Rightarrow\quad \Phi_{\rm est} = -\Phi_{\rm int} = -\pi\mu_0 R^2\, nI\,.$$

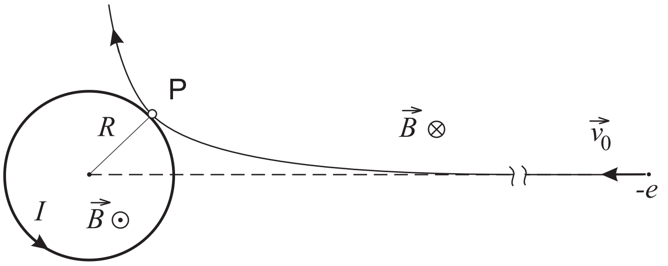
Alternativamente, ragionando in modo meno rigoroso in termini di linee di campo, il teorema di Gauss equivale a dire che le linee di $\vec{B}$ sono linee chiuse; nel caso del solenoide tutte le linee (escluso l'asse) che attraversano il piano π all'interno lo riattraversano in verso opposto all'esterno. Da qui si può arrivare alla stessa conclusione.

NOTA – *Nel problema si è adottata, per semplicità, l'approssimazione tradizionale per cui il campo è considerato uniforme all'interno e cambia verso in un intervallo di larghezza nulla intorno alla superficie del solenoide: in realtà questo è vero solo nel limite di solenoide di lunghezza infinita, ma ciò non cambia sostanzialmente la soluzione del problema.*

Quesito n. 3.

Sull'elettrone agisce la forza di Lorentz $\vec{F} = -e\vec{v}\times\vec{B}$, dove $\vec{v}$ è la velocità dell'elettrone. Poiché $\vec{F}$ è perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$ e questo è perpendicolare al piano π, segue che anche $\vec{F}$ giace su quel piano; inizialmente $\vec{v}$ giace sullo stesso piano mediano, dunque sia $\vec{v}$ sia $\vec{F}$ rimarranno sul piano π lungo tutta la traiettoria; questa quindi è piana, sullo stesso piano mediano.

Infine, poiché per ogni $I < I_{\min}$ l'elettrone urta il solenoide e per ogni $I > I_{\min}$ non lo urta, il caso particolare $I = I_{\min}$ corrisponde ad una traiettoria tangente la superficie del solenoide.

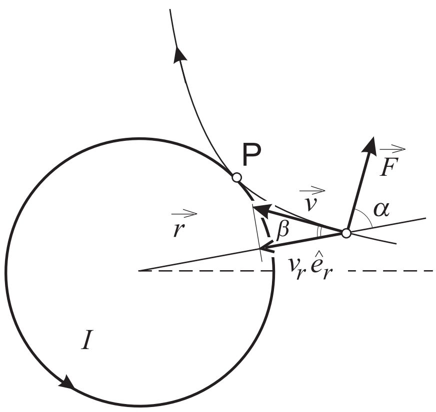


Quesito n. 4.

Il momento della forza di Lorentz (ortogonale a $\vec{r}$ e a $\vec{F}$ e dunque al piano mediano) ha modulo $\mathcal{M} = rF\,\text{sen}\,\alpha$ essendo α l'angolo tra i due vettori; inoltre $F = ev\,B_{\rm est}(r)$, quindi

$$\mathcal{M} = erv\,B_{\rm est}(r)\;\text{sen}\,\alpha\,.$$

Ma $v\,\text{sen}\,\alpha = v\cos(90° - \alpha) = v\cos\beta = -v_r$ (dove v_r è la componente radiale della velocità, vedi figura), per cui si ottiene l'espressione data nel testo.



Quesito n. 5.

La seconda equazione cardinale della dinamica per il momento assiale delle forze e la componente assiale del momento angolare si scrive

$$\frac{dL}{dt} = \mathcal{M} = -er\,B_{\text{est}}(r)\,v_r = -erB_{\text{est}}(r)\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad dL = -er\,B_{\text{est}}(r)\,dr\,.$$

Sia $\hat{n}$ il versore normale al piano π, orientato come il campo magnetico interno al solenoide; il flusso magnetico attraverso la corona circolare di raggi R ed r e superficie S è

$$\Phi(r) = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\;ds = \int_R^r 2\pi r\,\vec{B}\cdot\hat{n}\;dr \quad \text{(avendo posto } ds = 2\pi r\,dr\text{)}$$

e la variazione di questo al variare di r, tenuto conto che il campo esterno è diretto in verso opposto ad $\hat{n}$, si può scrivere(*)

$$d\Phi = \vec{B}\cdot\hat{n}\;ds = -2\pi r dr B_{\text{est}}(r)\,,$$

da cui

$$dL = -er\,B_{\text{est}}(r)\,dr = \frac{e}{2\pi}\,d\Phi\,.$$

Quesito n. 6.

Vista la proporzionalità fra dL e $d\Phi$, integrando, si può scrivere

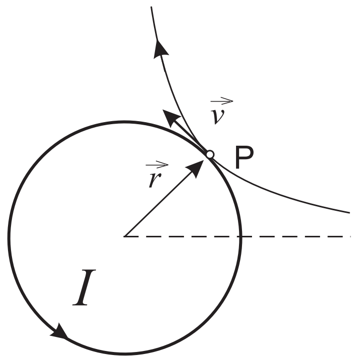
$$\Delta L = L(\mathrm{P}) - L_0 = \int_{L_0}^{L(\mathrm{P})} dL = \frac{e}{2\pi}\int_{\infty}^{R} d\Phi = -\frac{e}{2\pi}\int_{R}^{\infty} d\Phi = -\frac{e}{2\pi}\Phi_{\text{est}}\,.$$

Poiché il momento angolare a grande distanza (L_0) è nullo, dato che la velocità iniziale è allineata con l'asse del solenoide, e considerando il punto P relativo al caso della corrente $I_{\min}$, si ottiene

$$L(\mathrm{P}) = \Delta L = -\frac{e}{2\pi}\Phi_{\text{est}} = \frac{\mu_0 R^2\,e\,nI_{\min}}{2}\,.$$

Quesito n. 7.

Per $I = I_{\min}$ la traiettoria è quella vista al punto 3. Il momento angolare assiale in P vale $L(\mathrm{P}) = mv(\mathrm{P})\,R$.



La forza di Lorentz, essendo perpendicolare alla velocità, non compie lavoro, per cui l'energia cinetica e di conseguenza il modulo della velocità si conservano lungo tutta la traiettoria: $v(\mathrm{P}) = v_0$. Sostituendo a $L(\mathrm{P})$ e Φ_{est} i rispettivi valori si ha

$$mv_0\,R = \frac{e}{2\pi}(\pi\mu_0 R^2\,nI_{\min}) \quad \Rightarrow \quad I_{\min} = \frac{2mv_0}{e\mu_0 nR}\,.$$

(*) Si osservi che quando l'elettrone si allontana dal solenoide, cioè per $dr > 0$ la variazione corrisponde al contributo al flusso magnetico della corona circolare infinitesima, mentre quando l'elettrone si avvicina ($dr < 0$) è il suo opposto.

PROBLEMA n. 3 – Scalda e raffredda

Quesito n. 1.

La potenza erogata dal riscaldatore è $W_\mathrm{r} = \mathcal{E}^2/r$ (effetto Joule); quindi la quantità di calore ceduto dal riscaldatore nel tempo Δt è $Q = \mathcal{E}^2\,\Delta t/r$.

Dato che per tempi brevi la conduzione di calore attraverso il setto può essere trascurata, il calore fornito dal riscaldatore fa aumentare la temperatura del gas di una quantità ΔT data da $Q = nc_V\Delta T$ dove $c_V = 3R/2$, essendo il gas monatomico.

In definitiva

$$\Delta T = \frac{Q}{n\,c_V} = \frac{\mathcal{E}^2\,\Delta t}{r}\frac{2}{3Rn} \quad \text{da cui} \quad T_1 = T_0 + \frac{2\mathcal{E}^2}{3Rn\,r}\Delta t\,.$$

Quesito n. 2.

La potenza dispersa attraverso il setto è proporzionale al coefficiente di conduzione termica k del materiale di cui è fatto, alla sua superficie ℓ^2 e inversamente proporzionale al suo spessore d; è anche proporzionale alla differenza di temperatura che cresce mentre il gas a destra viene riscaldato.

Il massimo valore di potenza dispersa si avrà quindi quando la differenza di temperatura è massima, cioè ΔT calcolata al punto precedente.

$$W_\mathrm{d} = k\,\frac{\ell^2\Delta T}{d} = k\,\frac{\ell^2}{d}\,\frac{2\mathcal{E}^2}{3Rn\,r}\Delta t\,.$$

Quesito n. 3.

Il setto potrà essere considerato un buon isolante termico se $W_\mathrm{r} \gg W_\mathrm{d}$ durante tutta la fase di riscaldamento, in particolare al termine, quando W_d è massima. Dunque

$$\frac{\mathcal{E}^2}{r} \gg \frac{k\ell^2\Delta T}{d} \quad \Rightarrow \quad k \ll \frac{\mathcal{E}^2\,d}{r\ell^2\Delta T}\,.$$

Utilizzando l'espressione di ΔT determinata sopra, la condizione rimane

$$k \ll \frac{3d\,Rn}{2\ell^2\,\Delta t}\,.$$

Quesito n. 4.

Nell'istante in cui si spegne l'elemento riscaldante, le quantità di gas nelle due camere sono rispettivamente alle temperature T_0 e T_1; le relative pressioni sono

$$p_0 = \frac{nRT_0}{h\ell^2} \quad \text{e} \quad p_1 = \frac{nRT_1}{h\ell^2}$$

per cui la forza dovuta alla differenza di pressione sul setto vale

$$F_p = \ell^2\Delta p = \frac{nR\Delta T}{h} = \frac{2\mathcal{E}^2}{3hr}\Delta t$$

essendo applicata al centro del setto per l'uniformità della pressione (si trascurano come sempre gli effetti della gravità).

La forza del blocco F_b deve quindi dare un momento opposto a quello della forza di pressione per cui, in modulo,

$$F_\mathrm{b}\ell = F_p\frac{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{b} = \frac{\mathcal{E}^2}{3hr}\Delta t\,.$$

Quesito n. 5.

Poiché l'energia interna totale si conserva e le quantità di gas sono uguali, la temperatura finale sarà data dalla media aritmetica delle temperature iniziali

$$T_\mathrm{eq} = \frac{1}{2}\,(T_0 + T_1)\,.$$

Quesito n. 6.

La sorgente calda si raffredda cedendo il calore dQ_c alla temperatura T_c; quindi $dQ_\mathrm{c} = nc_V\, dT_\mathrm{c}$ perché il volume del gas è costante.

Durante il processo di raffreddamento l'entropia della sorgente calda varia di

$$\Delta S_\mathrm{c} = \int_{T_1}^{T_\mathrm{eq}} \frac{dQ_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} = \int_{T_1}^{T_\mathrm{eq}} nc_V \frac{dT_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} = nc_V \ln \frac{T_\mathrm{eq}}{T_1}\,.$$

La variazione di entropia della sorgente calda è negativa.

La sorgente fredda si riscalda acquistando calore dQ_f alla temperatura T_f. Analogamente, durante il processo di riscaldamento, la sua entropia varia di

$$\Delta S_\mathrm{f} = \int_{T_0}^{T_\mathrm{eq}} \frac{dQ_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} = \int_{T_0}^{T_\mathrm{eq}} nc_V \frac{dT_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} = nc_V \ln \frac{T_\mathrm{eq}}{T_0}\,.$$

La variazione di entropia della sorgente fredda è positiva.

Il sistema costituito dai due gas è isolato e dunque la variazione di entropia totale durante il processo verso l'equilibrio termico è

$$\Delta S = \Delta S_\mathrm{c} + \Delta S_\mathrm{f} = nc_V \ln \frac{T_\mathrm{eq}}{T_1} + nc_V \ln \frac{T_\mathrm{eq}}{T_0} = nc_V \ln \frac{T_\mathrm{eq}^2}{T_1 T_0} = \frac{3Rn}{2} \ln \frac{(T_0 + T_1)^2}{4T_0\, T_1}\,.$$

L'entropia totale del sistema aumenta come si vede, poiché l'argomento del logaritmo è maggiore di 1; infatti $(T_0 + T_1)^2 - 4T_0T_1 = (T_0 - T_1)^2 > 0$ e dunque $(T_0 + T_1)^2 > 4T_0T_1$.

Quesito n. 7.

L'applicazione della macchina termica fa sì che una parte del calore assorbito dal gas caldo sia convertito in lavoro, per cui l'energia totale del gas risulterà minore di prima.

Quesito n. 8.

Se il processo è reso reversibile la variazione di entropia del sistema deve essere nulla; tenuto conto che la macchina di Carnot ha una variazione di entropia nulla compiendo una trasformazione ciclica, detta T_rev la temperatura di equilibrio in questo caso, deve essere

$$\Delta S = \frac{3Rn}{2} \ln \frac{T_\mathrm{rev}^2}{T_0\, T_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{rev} = \sqrt{T_0\, T_1}\,.$$

Materiale elaborato dal Gruppo