

### Bilancia elettrodinamica<sup>1</sup>

#### 1 Misura la distanza media tra i centri delle due bobine a bilancia scarica, con striscia posta sui sostegni, in posizione orizzontale. Quanto vale? Come hai proceduto?

L'orizzontalità della striscia può essere controllata con la squadretta o con il segmento di metro di carta fissato allo spessore verticale, spostati lungo tutta la striscia stessa.

Le due bobine si presentano come due anelli di spessore non trascurabile: lo spessore della bobina mobile è compreso tra 1 e 2 mm e quello della bobina fissa tra 2 e 3 mm. Le altezze dei "centri" delle due bobine si trovano rispettivamente a metà del loro spessore.

La distanza può essere letta direttamente sul segmento di metro di carta avvicinato alle due bobine affacciate, individuando a occhio i due punti a metà spessore. Può anche essere ricavata mediando le quote delle superfici inferiori e superiori delle due bobine, lette sulla squadretta o sul metro di carta.

Ponendo la bobina fissa e gli angolari direttamente sul foglio di cartone, e gli spilli nei due intagli ad U, la distanza  $d$  risulta  $7 \pm 1$  mm.

Ponendo invece gli angolari su spessori di 3 mm, si ottiene la distanza massima di  $10 \pm 1$  mm.

Distanze intermedie si possono ottenere usando opportunamente gli spessori, o sotto gli angolari, o sotto la bobina fissa se si sceglie di appoggiare gli spilli sul bordo superiore degli angolari invece che nell'intaglio.

#### 2 Usa la striscia di plastica come se fosse una normale bilancia a bracci, e la parte restante del foglio di alluminio, che puoi ritagliare e piegare come meglio credi. Supponi uniforme lo spessore del foglio.

##### Per mezzo del punto per cucitrice, di massa $0,198 \pm 0,002$ g, determina la massa (in grammi) di ogni centimetro quadrato del foglio di alluminio. Quanto vale? Come hai proceduto?

Nei procedimenti riportati come esempi, l'operazione preliminare è di ritagliare un quadrato o un rettangolo di foglio di alluminio, di dimensioni note, e di piegarlo riducendolo ad una strisciolina sottile. Si può così determinare facilmente la posizione del suo centro di massa. La bilancia è usata come una leva di primo genere.

**2.1.1** Si ritaglia un quadrato di area  $100 \pm 2$  cm<sup>2</sup>, nel foglio di alluminio. Lo si piega più volte lungo lo stesso lato, a metà e poi ancora a metà ecc., fino ad ottenere una strisciolina lunga 10 cm e larga circa 0,5 cm.

Il punto di cucitrice che fa da riferimento, è appoggiato con il centro di massa su uno dei due segmenti tracciati sulla bilancia. In posizione simmetrica rispetto al fulcro, si pone la strisciolina di alluminio. Il peso di questa prevale. Se ne taglia una lunghezza di 1 cm alla volta, corrispondente ad un'area di 10 cm<sup>2</sup>, finché il peso della strisciolina è inferiore a quello del punto. Si aggiungono allora pezzetti di foglio di area nota fino ad ottenere l'equilibrio.

Tabella 2.1.1

Massa del punto $\mu$ (g)	braccio	Area $A$ (cm <sup>2</sup> )	braccio	Massa $m_1$ di 1 cm <sup>2</sup> di foglio (g)
$(198 \pm 2) \cdot 10^{-3}$	$a$	$57 \pm 2$	$b$	$(3,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$

Si ricava  $m_1$  dall'uguaglianza:  $m_1 / 1 \text{ cm}^2 = \mu / A$ , ottenuta nell'ipotesi dell'uguaglianza dei due bracci.

Supporre  $a = b$ , comporta un errore, di circa il 2%.

Incertezza relativa su  $m_1 = 2/100 + 2/198 + 2/57 = 0,065$ ; incertezza assoluta =  $0,22 \cdot 10^{-3}$  g

**2.1.2** Si può tener conto della disuguaglianza dei due bracci, scambiando di posto punto e foglio di alluminio, in una specie di "pesata doppia". L'equilibrio si riottiene con una diversa superficie del foglio.

Tabella 2.1.2

Massa del punto $\mu$ (g)	braccio	Area $A$ (cm <sup>2</sup> )	braccio	Massa $m_1$ di 1 cm <sup>2</sup> di foglio (g)
$(198 \pm 2) \cdot 10^{-3}$	$a$	$A_1 = 57 \pm 2$	$b$	$(3,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
	$b$	$A_2 = 63 \pm 2$	$a$	

Dalle due uguaglianze

$\mu \cdot a = (m_1 / 1 \text{ cm}^2) \cdot A_1 \cdot b$ ;  $\mu \cdot b = (m_1 / 1 \text{ cm}^2) \cdot A_2 \cdot a$ , moltiplicate membro a membro, si ricava  $m_1 / 1 \text{ cm}^2 = \mu / \sqrt{A_1 \cdot A_2}$

Incertezza relativa su  $m_1 = 2/198 + \frac{1}{2} (2/57 + 2/63) = 0,0435$ ; incertezza assoluta =  $0,14 \cdot 10^{-3}$  g

**2.2.1** Un foglio quadrato di alluminio di area  $A = 100 \pm 2$  cm<sup>2</sup> viene piegato più volte in una striscia rettangolare.

Ad un estremo del goglio si pone il punto "sdraiato" in modo che uno dei due lati paralleli della "U" ne lambisca il bordo.

<sup>1</sup> Questa prova deriva in buona parte da "Experiment MF – Magnetic Force" proposto nel sito del Massachusetts Institute of Technology".

Per bilanciare il punto si fa scorrere sul giogo la striscia di alluminio, fino a trovare l'equilibrio. Si ripete scambiando le posizioni rispetto al fulcro, di punto e striscia di alluminio.

Tabella 2.2.1; 2.2.2

Massa del punto $\mu$ (g)	Braccio (cm)	Area A (cm <sup>2</sup> )	Braccio (cm)	Massa $m_1$ di 1 cm <sup>2</sup> di foglio (g)
$(198 \pm 2) \cdot 10^{-3}$	$b_1 = 11,75 \pm 0,05$	$100 \pm 2$	$a_1 = 6,75 \pm 0,05$	$(3,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ con la (1) (procedimento 2.1)
	$b_2 = 11,90 \pm 0,05$		$a_2 = 6,90 \pm 0,05$	
				$(3,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ con la (2) (procedimento 2.2)

Moltiplicando membro a membro le due uguaglianze dei momenti dei pesi si ricava l'espressione per  $m_1$ :

$$m_1 = \frac{1}{100} \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{b_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot a_2}} \quad (1)$$

Incertezza relativa su  $m_1 = 2/100 + 2/198 + \frac{1}{2} (0,05/11,75 + 0,05/11,90 + 0,05/6,75 + 0,05/6,90) = 0,04165$  ;  
incertezza assoluta =  $0,14 \cdot 10^{-3}$  g

**2.2.2** Se alla partenza c'è un lieve difetto di orizzontalità del giogo occorre tener conto nei calcoli anche del momento prodotto dal peso del giogo stesso. Di fatto esso rappresenta un errore sistematico. Realizzando le due situazioni di equilibrio come in **2.2.1**, lavorando nelle medesime condizioni di azzeramento della bilancia si può eliminare l'errore sistematico, facendo la differenza membro a membro delle due equazioni che descrivono la condizione di equilibrio. In tal modo si ottiene:

$$m_1 = \frac{1}{100} \cdot \mu \cdot \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \quad (2)$$

Incertezza relativa su  $m_1 = 2/100 + 2/198 + (0,05+0,05)/(11,75 + 11,90) + (0,05 + 0,05)/(6,75 + 6,90) = 0,04165$  ;  
incertezza assoluta =  $0,14 \cdot 10^{-3}$  g

**2.3.1** Posto il punto a 4 cm dal bordo, si cerca l'equilibrio con foglietti di alluminio di area nota A piegati a strisciolina e posti a diverse distanze x dal fulcro. Dall'uguaglianza dei momenti e dalla proporzionalità tra massa del foglio di alluminio e area A, si ricava la diretta proporzionalità tra x e A<sup>-1</sup>;

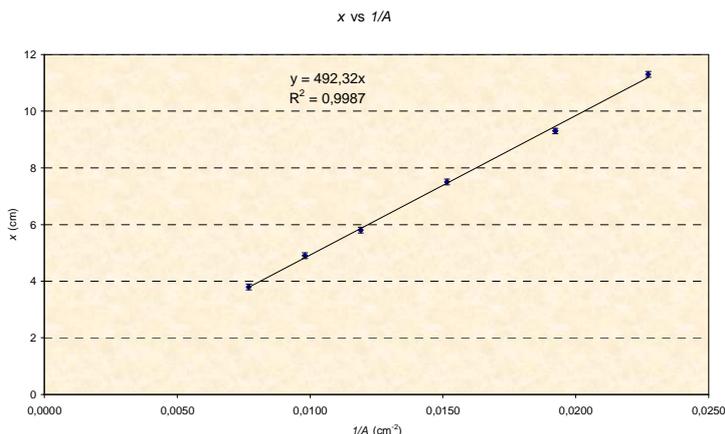
Dal grafico di x in funzione di A<sup>-1</sup> si può calcolare il coefficiente angolare  $k = x \cdot A$  della retta che permette di trovare la massa  $m_1$  di 1 cm<sup>2</sup> del foglio.

Dalla  $\mu \cdot b = m_1/1 \text{ cm}^2 \cdot A \cdot x$  si ricava:  $\mu \cdot b = (m_1/1 \text{ cm}^2) \cdot k$  e quindi  $(m_1/1 \text{ cm}^2) = \mu \cdot b / k$

Tabella 3.1

Massa del punto $\mu$ (g)	Braccio (cm)	Area A	Braccio x (cm)	Massa di 1 cm <sup>2</sup> di foglio $m_1$ (g)
$(198 \pm 2) \cdot 10^{-3}$	$b = 8.40 \pm 0.05$ cm	$44 \pm 2$	$11,3 \pm 0,1$	$(3,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$ $(3,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
		$52 \pm 2$	$9,3 \pm 0,1$	
		$66 \pm 2$	$7,5 \pm 0,1$	
		$84 \pm 2$	$5,8 \pm 0,1$	
		$102 \pm 2$	$4,9 \pm 0,1$	
		$130 \pm 2$	$3,8 \pm 0,1$	

Grafico 1



Dal grafico della regressione lineare si ricava  $k = 492 \text{ cm}^3$ ; se ad esso si associa la somma delle incertezze percentuali su  $x$  e su  $A$ , che è intorno a 4%, risulta:

Incertezza relativa su  $m_1$   
 $2/198 + 0,05/8,40 + 0,04 = 0,056$ ;  
 incertezza assoluta =  $0,19 \cdot 10^{-3} \text{ g}$

Dalla semidispersione media dei valori di  $k$  che è intorno al 2%, si ricava:

Incertezza relativa su  $m_1 = 2/198 + 0,05/8,40 + 0,02 = 0,036$   
 incertezza assoluta =  $0,12 \cdot 10^{-3} \text{ g}$

NOTA. La massa di un rettangolo di foglio di alluminio di

dimensioni  $29,0 \pm 0,1 \text{ cm}$  e  $30,0 \pm 0,1 \text{ cm}$ , misurata con bilancia elettronica è risultata pari a  $2,95 \pm 0,01 \text{ g}$ . Da queste misure, nell'ipotesi che lo spessore sia uniforme, si ricava la massa  $m_1$  di  $1 \text{ cm}^2$ .  $m_1 = (3,39 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ g}$

**3 Disponi via via i pesetti campione sulla bilancia e regola la corrente per mezzo del reostato, fino ad ottenere l'equilibrio. Non superare la corrente di 0,50 A, per non scaricare troppo la batteria.**

**Riporta in una tabella le misure della corrente  $I$  ed il corrispondente numero  $n$  di campioni.**

**Dai tuoi dati sperimentali, ricava una formula che rappresenti la relazione tra  $I$  ed  $n$ . Se nella formula compaiono delle costanti, precisane il valore.**

Per bilanciare la forza repulsiva tra le bobine i campioni di peso vanno posti sul segno tracciato in corrispondenza del centro della bobina mobile.

Le misure riportate nella tabella sottostante, sono state ottenute con le bobine poste a due differenti distanze. Nel primo caso, distanza  $d = 7 \pm 1 \text{ mm}$ , la bobina fissa e gli angolari sono appoggiati direttamente sul cartone, e gli spilli alloggiati negli intagli ad U dei due angolari. Nel secondo caso, distanza  $d = 10 \pm 1 \text{ mm}$ , l'unica differenza sta nel fatto che gli angolari sono posti sopra spessori di 3 mm. Con  $n$  si indica il numero di campioni di peso posti sulla bilancia.

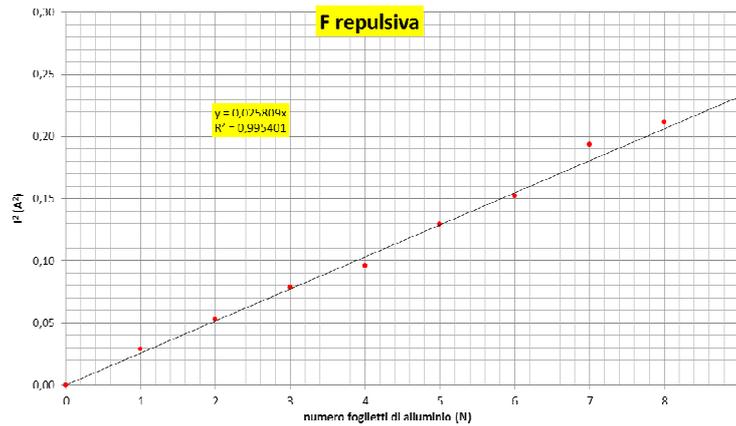
N.B. nella tabella sottostante sono riportate anche le misure di corrente ottenute con forza attrattiva (v. domanda 6)

**Tabella 3 – 6**

Distanza tra le bobine $d = 7 \pm 1 \text{ mm}$				Distanza tra le bobine $d = 10 \pm 1 \text{ mm}$		
	Corrente in Repulsione $I$	Rapporto $I^2/n$ in Repulsione	Corrente in Attrazione	Corrente in repulsione	Rapporto $I^2/n$ in Repulsione	Corrente in attrazione
$n$	$I \pm 0,01 \text{ (A)}$	$I^2/n \text{ (A}^2\text{)}$	$I \pm 0,01 \text{ (A)}$	$I \pm 0,01 \text{ (A)}$	$I^2/n \text{ (A}^2\text{)}$	$I \pm 0,01 \text{ (A)}$
0	0,00		0,00	0,00		0,00
1	0,17	0,029	0,18	0,18	0,032	0,19
2	0,23	0,026	0,25	0,25	0,031	0,27
3	0,28	0,026	0,28	0,30	0,030	0,35
4	0,31	0,024	0,32	0,36	0,032	0,40
5	0,36	0,026	0,36	0,42	0,035	0,44
6	0,39	0,025	0,40	0,45	0,034	0,48
7	0,44	0,028	0,46	0,49	0,034	0,52
8	0,46	0,026	0,47	0,53	0,034	0,56
9	0,48	0,026	0,50			
10	0,50	0,025	0,52			
		Rapporto medio $k = I^2/n$ : 0,026 $\text{A}^2$ (da regressione lineare) 0,026 $\text{A}^2$ (da media aritmetica)			Rapporto medio $k = I^2/n$ : 0,034 $\text{A}^2$ (da regressione lineare) 0,033 $\text{A}^2$ (da media aritmetica)	

Il Grafico 2 mostra l'andamento di  $I^2$  in funzione di  $n$ , per la distanza di 7 mm.

Grafico 2



La relazione tra  $I$  ed  $n$  è :

$$I^2 = 0,026 \text{ A}^2 \cdot n, \text{ oppure } I = 0,16 \text{ A} \cdot \sqrt{n} \text{ se la distanza } d \text{ tra le bobine è } d = 7 \pm 1 \text{ mm}$$

$$I^2 = 0,034 \text{ A}^2 \cdot n, \text{ oppure } I = 0,18 \text{ A} \cdot \sqrt{n} \text{ se la distanza tra le bobine è } d = 10 \pm 1 \text{ mm}$$

La semidispersione massima dei valori delle costanti di proporzionalità si può assumere uguale a  $\pm 0,002 \text{ A}^2$ , pari a 8% o 6%.

**4 Dai tuoi dati sperimentali, ricava una formula che rappresenti la relazione tra la forza elettrodinamica  $F$  e l'intensità di corrente  $I$ . Se nella formula compaiono delle costanti, precisane il valore.**

Uguagliando l'intensità della forza elettrodinamica  $F$ , al peso complessivo dei foglietti di alluminio necessari per l'equilibrio, si ottiene

$F = 2m_1 \cdot g \cdot n$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Poiché  $n = I^2 / k$ , si ottiene

$$F = \frac{2m_1 g}{k} I^2 \quad (3)$$

Alla distanza  $d = 7 \text{ mm}$  risulta  $F = (2 \cdot 3,39 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}) / (0,0258 \text{ A}^2) \cdot I^2$ , da cui  $F/I^2 = (2,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \text{ N/A}^2$

Alla distanza  $d = 10 \text{ mm}$  risulta  $F = (2 \cdot 3,39 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}) / (0,0342 \text{ A}^2) \cdot I^2$ , da cui  $F/I^2 = (1,9 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ N/A}^2$

NOTA. Si può ricavare, con una certa approssimazione, l'espressione teorica per la Forza elettrodinamica  $F$  assimilando le due bobine a due conduttori rettilinei e paralleli. L'approssimazione è tanto migliore quanto è maggiore della distanza, il raggio delle bobine.

Il campo magnetico  $B_1$  creato dalla corrente  $I_1$  nelle  $N_1$  spire della bobina fissa, alla distanza  $d$  è  $B_1 = \mu_0 N_1 I_1 / (2\pi d)$ , dove  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto uguale a quella dell'aria.

La forza sulla corrente  $I_2$  nelle  $N_2$  spire della bobina mobile è  $F = N_2 I_2 B_1 2\pi r$ .

Sostituendo l'espressione di  $B_1$  nella , e poiché  $I_1 = I_2 = I$  si ottiene

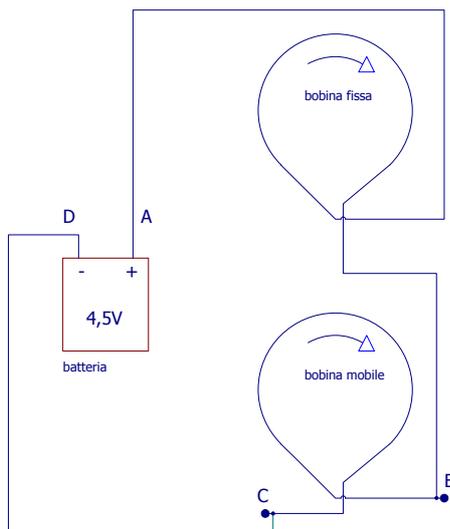
$$F = \mu_0 \frac{N_1 N_2 r}{d} I^2 \quad (4)$$

Nel caso delle bobine della prova,  $N_1 = 50$ ;  $N_2 = 10$ ;  $r = (2,95 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$

Con questi dati, i valori teorici delle costanti richieste nelle domande 3 e 4 facilmente calcolabili con le formule (3) e (4), risultano (v.tabella)

Tabella 3 - 4

d (mm)	7,00	8,00	9,00	10,00
$I^2/n \text{ (A}^2)$	$2,42 \cdot 10^{-2}$	$2,76 \cdot 10^{-2}$	$3,11 \cdot 10^{-2}$	$3,45 \cdot 10^{-2}$
$F/I^2 \text{ (N/A}^2)$	$2,65 \cdot 10^{-3}$	$2,32 \cdot 10^{-3}$	$2,06 \cdot 10^{-3}$	$1,85 \cdot 10^{-3}$



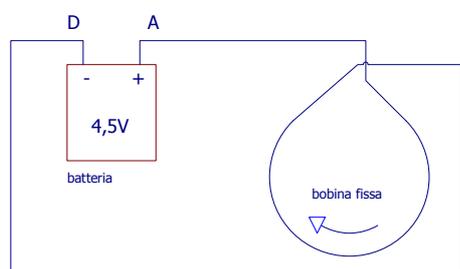
**5 Predisponi l'apparecchiatura in modo che la forza tra le bobine sia attrattiva.**

**Quali modifiche hai apportato all'apparecchiatura? Disegna il circuito**  
Perché la forza sia attrattiva, la corrente deve avere lo stesso verso nelle due bobine.

Si può invertire la corrente nella bobina fissa, scambiando il collegamento dei due capi, a batteria e angolare. Si può anche lasciare i collegamenti così come sono e ribaltare la bobina fissa sulla base di cartone.

È più macchinoso invertire la corrente nella bobina mobile, scambiando il collegamento ai due angolari di bobina fissa e reostato.

Olimpiadi della Fisica 2013 – Gara Nazionale – Prova Sperimentale  
Soluzione



**6 Riporta in una tabella le misure della corrente  $I$  ed il corrispondente numero  $n$  di campioni, con forza attrattiva.**

Le misure sono riportate nella tabella 3-6 a pag. 3

**7 Avrai notato che l'equilibrio è più difficile da ottenere con forza attrattiva. Come spieghi questa difficoltà?**

La difficoltà nasce dal fatto che la forza elettrodinamica cresce al diminuire della distanza tra le due bobine. Per scostamenti dalla posizione orizzontale di equilibrio, in una bilancia “normale”, la somma dei momenti dei due pesi laterali è sempre nulla, mentre il momento del peso del giogo  $M_g \neq 0$  contrasta lo scostamento fino a farla tornare orizzontale dopo qualche oscillazione.

Nel nostro caso, con gli stessi scostamenti, la somma dei due momenti laterali non è più nulla, poiché la forza elettrodinamica è funzione decrescente della distanza. Se la bobina mobile si alza, il momento  $M_e$  della forza attrattiva elettrodinamica, che tenderebbe a riportarla giù, diminuisce di una quantità  $\Delta M_e$ . Al contrario se la bobina mobile si abbassa, il momento  $M_e$  che tende ad abbassarla ancora di più, aumenta di  $\Delta M_e$ . Se il momento del giogo prevale su  $|\Delta M_e|$  o  $|\Delta M_e'|$  la bilancia torna in equilibrio orizzontale, altrimenti se ne scosta sempre di più.

La posizione orizzontale della bilancia è ancora di equilibrio stabile, ma in un intorno sempre più piccolo a mano a mano che cresce la corrente, poiché la forza elettrodinamica cresce al crescere della corrente e quindi crescono anche le variazioni del suo momento  $|\Delta M_e|$  o  $|\Delta M_e'|$ .

Si riesce ad ottenere l'equilibrio senza accorgimenti particolari anche in attrazione, con uno, due o al massimo tre foglietti di alluminio sulla bilancia. Occorre solo agire delicatamente, per esempio con un dito, per “aiutare” la bilancia a mettersi orizzontale.

**8 Individua qualche accorgimento per rendere più agevole la misurazione della corrente  $I$  necessaria per l'equilibrio. Hai a disposizione spessori di plastica e di carta, che possono aiutarti. Descrivi brevemente come hai proceduto.**

Le misure riportate nella tabella 3-6 (colonne 4<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup>) a pag.3 sono state ottenute con il metodo seguente.

Si dispone il giogo, caricato con i foglietti di alluminio, in modo che, con corrente nulla, risulti orizzontale e in lieve contatto con alcuni spessori posti sotto di esso, dalla parte opposta a quella delle bobine.

Si aumenta lentamente l'intensità della corrente sino a quando il giogo inizia ad abbassarsi dalla parte delle bobine, e si legge sull'amperometro il valore della corrente. Con questo metodo la corrente letta ha un piccolo errore in eccesso. Si può notare nella Tabella 3 – 6 a pag 3 che i valori di corrente in attrazione superano in genere quelli corrispondenti in repulsione.

Si può anche sistemare gli spessori sotto il giogo, all'interno della bobina fissa, in modo che il giogo sia orizzontale. Questo va poi caricato con i foglietti di alluminio. Gli si impedisce con un dito di sollevarsi, e si aumenta lentamente la corrente finché resta in posizione orizzontale anche senza l'“aiuto” del dito. Si diminuisce poi la corrente finché inizia a staccarsi dallo spessore. Con questo metodo, più macchinoso del precedente, la corrente letta ha un errore in difetto.