

# OLIMPIADI DI FISICA 2012

GARA NAZIONALE  
PROVA TEORICA  
VENERDÌ  
13 APRILE 2012  
LICEO SCIENTIFICO "E. MEDICI"  
SENIGALLIA (AN)

## Soluzioni

### PROBLEMA n. 1 – Scattering elastico tra sfere

#### Quesito n. 1.

L'angolo di incidenza  $\varphi$ , rappresentato in figura, è legato al parametro d'impatto dalla relazione:

$$b = (R + r) \sin \varphi$$

Poiché l'urto segue le leggi della riflessione, l'angolo di riflessione è di nuovo  $\varphi$ . Di conseguenza  $\theta = 2\varphi$ , da cui otteniamo

$$b = (R + r) \sin \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

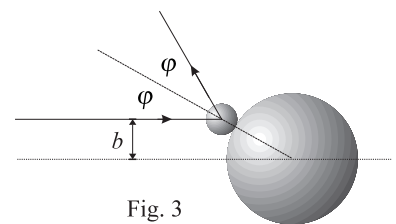


Fig. 3

#### Quesito n. 2.

Poiché la relazione (1) tra  $b$  e  $\theta$  è una funzione crescente nell'intervallo che ci interessa ( $0 < \theta < \pi$ ), le particelle diffuse entro un angolo  $\theta$  sono quelle che incidono con un parametro d'impatto minore di  $b$ , dove  $b$  e  $\theta$  sono legati dalla (1). Siccome  $I$  è uniforme, il loro numero,  $n_d(\theta)$ , sarà:

$$n_d(\theta) = I\pi b^2 = I\pi (R + r)^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = I\pi (R + r)^2 \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad (2)$$

Il numero di particelle diffuse tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  è

$$dn_d(\theta) = n_d(\theta + d\theta) - n_d(\theta) = I\pi (R + r)^2 \frac{\cos \theta - \cos(\theta + d\theta)}{2}$$

Utilizzando la formula di addizione per il coseno e approssimando  $\cos d\theta = 1$  e  $\sin d\theta = d\theta$  o, in modo equivalente, differenziando la (2), otteniamo:

$$dn_d(\theta) = \frac{1}{2} I\pi (R + r)^2 \sin \theta d\theta \quad (3)$$

La funzione  $dn_d(\theta)/d\theta$  ha quindi il suo massimo per  $\theta = \pi/2$  rad.

#### Soluzione alternativa

Le particelle diffuse ad un angolo compreso tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  sono quelle che incidono su una corona circolare di raggio interno  $b$  e spessore  $db$ . Differenziando la relazione (1) (o procedendo come sopra) otteniamo:

$$db = \frac{1}{2} (R + r) \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

da cui possiamo calcolare l'area della corona circolare:

$$2\pi b db = 2\pi(R+r) \sin \frac{\theta}{2} \times \frac{1}{2} (R+r) \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \pi (R+r)^2 \sin \theta d\theta$$

Moltiplicando per l'intensità (uniforme) del fascio otteniamo di nuovo l'equazione (3).

### Quesito n. 3.

Consideriamo adesso il rivelatore. Poiché  $R \ll D$ , le particelle diffuse appariranno provenire da un unico punto. In generale, per calcolare il numero di particelle che incidono sul rivelatore dovremmo integrare opportunamente la relazione (2) sull'angolo sotteso dal rivelatore. L'approssimazione  $\ell \ll D$ , ci permette di calcolare l'angolo  $\Delta\theta$  sotteso dal lato dell'area sensibile del rivelatore come:

$$\Delta\theta = \ell/D \quad (4)$$

Nelle ipotesi fatte, questo angolo risulta piccolo, per cui potremo calcolare il numero  $\Delta n_d(\theta)$  di particelle diffuse che ricadono in quest'angolo usando la (3) senza bisogno di integrare.

Le particelle diffuse nell'angolo  $\Delta\theta$  sono distribuite su una sorta di “corona circolare”<sup>(\*)</sup> di larghezza  $\ell$  e di raggio  $D \sin(\pi - \theta) = D \sin \theta$ . Di queste, il rivelatore ne intercetterà una frazione pari al rapporto tra  $\ell$  e la lunghezza della circonferenza. Avremo quindi:

$$n_r = \Delta n_d(\theta) \frac{\ell}{2\pi D \sin \theta} = \frac{1}{2} I \pi (R+r)^2 \sin \theta \frac{\ell}{D} \frac{\ell}{2\pi D \sin \theta} = I (R+r)^2 \frac{\ell^2}{4D^2} \quad (5)$$

### Quesito n. 4.

Si vede quindi che  $n_r$  è direttamente proporzionale all'area sensibile del rivelatore, e inversamente proporzionale al quadrato di  $D$  ed è indipendente da  $\theta$ .

La sfera fissa, colpita dal fascio, si comporta a tutti gli effetti come una sorgente isotropa di particelle, se osservata da una distanza molto maggiore del suo raggio.

### Quesito n. 5.

La forza complessiva che le particelle esercitano sulla sfera, per il terzo principio della dinamica, avrà lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto rispetto a quella che la sfera esercita sulle particelle. Per determinare quest'ultima, si può osservare che la quantità di moto totale delle particelle diffuse durante l'intervallo  $\Delta t$ ,  $\vec{P}_{\text{diff}}$ , è nulla per simmetria, visto che le particelle vengono diffuse in maniera isotropa. D'altra parte, la quantità di moto totale delle stesse particelle, prima dell'urto con la sfera fissa, era:

$$\vec{P}_{\text{inc}} = I \pi (R+r)^2 \Delta t m \vec{v}$$

La forza media subita dalle particelle del fascio, ad opera della sfera fissa, risulta dunque:

$$\langle \vec{F}_{\text{sf}} \rangle = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = -I \pi (R+r)^2 m \vec{v}$$

dove abbiamo usato le parentesi angolari per indicare la media temporale (effettuata sull'intervallo  $\Delta t$ ).

La forza che le particelle esercitano sulla sfera sarà quindi:

$$\langle \vec{F}_p \rangle = I \pi (R+r)^2 m \vec{v}$$

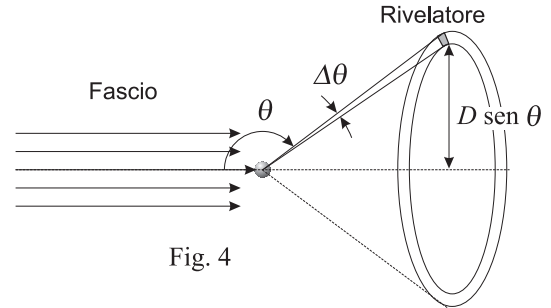


Fig. 4

(\*) Più propriamente si chiama “zona sferica” la parte di superficie sferica compresa tra due piani paralleli.

**PROBLEMA n. 2 – Equilibrio radiazione–materia**
**Quesito n. 1 – Lettura del grafico.**

I risultati in Tab. 1 sono ricavati da un'analisi statistica dei dati raccolti, e non da una semplice lettura dei grafici. Per questa ragione presentano più cifre significative di quelle da attendersi da parte dello studente, ma si considerano accettabili le risposte che differiscano da quelle indicate fino a  $1^\circ\text{C}$  o 10 s.

Si riportano quindi in Tab. 2 i range di valori considerati accettabili, nell'ipotesi che vengano scritti dei dati arrotondati a non meno di  $0.5^\circ\text{C}$  o 1 s.

Tab. 1	barattolo nero	barattolo bianco
$T_{\text{ai}}$	$19.6^\circ\text{C}$	$19.9^\circ\text{C}$
$T_{\text{af}}$	$22.8^\circ\text{C}$	$21.6^\circ\text{C}$
$T_{\text{eq}}$	$55.1^\circ\text{C}$	$38.3^\circ\text{C}$
$T_{\text{risc}}^{[1/2]}$	$37, 3^\circ\text{C}$	$29.1^\circ\text{C}$
$T_{\text{raff}}^{[1/2]}$	$38.9^\circ\text{C}$	$30.0^\circ\text{C}$
$\tau_{\text{risc}}$	82 s	126 s
$\tau_{\text{raff}}$	84 s	130 s

Tab. 2	barattolo nero	barattolo bianco
$T_{\text{ai}}$	$18.5 \div 21^\circ\text{C}$	$19 \div 21^\circ\text{C}$
$T_{\text{af}}$	$21.5 \div 24^\circ\text{C}$	$20.5 \div 22.5^\circ\text{C}$
$T_{\text{eq}}$	$54 \div 56^\circ\text{C}$	$37 \div 39.5^\circ\text{C}$
$T_{\text{risc}}^{[1/2]}$	$36 \div 38.5^\circ\text{C}$	$28 \div 30^\circ\text{C}$
$T_{\text{raff}}^{[1/2]}$	$38 \div 40^\circ\text{C}$	$29 \div 31^\circ\text{C}$
$\tau_{\text{risc}}$	$72 \div 92$ s	$116 \div 136$ s
$\tau_{\text{raff}}$	$74 \div 94$ s	$120 \div 140$ s

**Quesito n. 2 – Modello per il raffreddamento.**

Si osserva dal grafico che la temperatura dell'ambiente non è costante durante tutto il processo, dato che i barattoli dissipano l'energia assorbita. Mentre la temperatura finale dell'ambiente si ricava dal grafico, quella all'inizio del raffreddamento non è nota. Dato che le variazioni sono comunque piccole, si può considerare la temperatura  $T_{\text{amb}}$  dell'ambiente costante durante il processo, ed essa sarà sicuramente compresa fra  $T_{\text{ai}}$  e  $T_{\text{af}}$ . La variazione  $dE$  di energia interna di ciascun barattolo nel tempo  $dt$  è dovuta a due contributi:

- la perdita di energia per conduzione termica, che è proporzionale alla differenza fra la temperatura del barattolo e quella dell'ambiente, con coefficiente di proporzionalità  $c$  che dipende dalla conducibilità termica e dalla superficie, uguali per i due barattoli:  $dE_a/dt = -c(T - T_{\text{amb}})$ .
- la perdita di energia per irraggiamento, proporzionale alla temperatura assoluta del barattolo alla quarta potenza; essa è in parte compensata dall'energia irradiata dall'ambiente circostante, proporzionale alla temperatura assoluta dell'ambiente alla quarta potenza. Come detto nel testo, data la piccola differenza di temperatura assoluta fra il barattolo e l'ambiente, assumiamo per semplicità che la perdita complessiva, come la precedente, sia proporzionale a  $T - T_{\text{amb}}$  (l'approssimazione rende risolubile analiticamente il problema ed è giustificata anche dal fatto che la perdita deve tendere a zero quando  $T$  si avvicina a  $T_{\text{amb}}$ ); il coefficiente di proporzionalità  $\beta$ , a differenza del precedente, dipende dal colore del barattolo:  $dE_b/dt = -\beta(T - T_{\text{amb}})$ .

Per ciascun barattolo si ha quindi

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_a}{dt} + \frac{dE_b}{dt} = -c(T - T_{\text{amb}}) - \beta(T - T_{\text{amb}}) \quad (1)$$

con  $c$  uguale per i due barattoli, e  $\beta$  diverso.

Per la temperatura si ha

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d(T - T_{\text{amb}})}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dE}{dt} = -\frac{(c + \beta)(T - T_{\text{amb}})}{C} \quad (2)$$

dove  $C$  è la capacità termica. Ponendo per semplicità  $x = T - T_{\text{amb}}$ , otteniamo

$$\frac{dx}{x} = -\frac{c + \beta}{C} dt \quad \text{la cui soluzione è} \quad \ln x \Big|_{T_0 - T_{\text{amb}}}^{T - T_{\text{amb}}} = -\frac{t}{\tau} \Big|_{t_0}^t$$

indicando col pedice 0 i valori all'istante iniziale dal raffreddamento. Sostituendo, ponendo  $t_0 = 0$  e indicando con  $\tau = C/(c + \beta)$  il tempo caratteristico di raffreddamento. Sostituendo, e ponendo  $t_0 = 0$ , si ha

$$\ln \frac{T - T_{\text{amb}}}{T_0 - T_{\text{amb}}} = -\frac{t}{\tau} \quad \text{e quindi} \quad T = T_0 e^{-t/\tau} + T_{\text{amb}} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = (T_0 - T_{\text{amb}}) e^{-t/\tau} + T_{\text{amb}} \quad (3)$$

**Quesito n. 3 – Calcolo parametri per il raffreddamento.**

Il tempo caratteristico  $\tau$  appena trovato può essere facilmente posto in relazione col tempo  $\tau_{\text{raff}}$  trovato dal grafico: al tempo  $t$  per cui  $e^{-t/\tau} = 1/2$  si ha  $T = (T_0 + T_{\text{amb}})/2 = T_{\text{raff}}^{[1/2]}$ , e quindi  $\tau_{\text{raff}} = \tau \ln 2$ .

Possiamo quindi calcolare il rapporto fra i valori di  $(c + \beta)$  relativi ai due barattoli bianco e nero, identificati dai pedici B e N, in funzione del rapporto fra i valori di  $\tau_{\text{raff}}$ :

$$\frac{c + \beta_N}{c + \beta_B} = \frac{\tau_{B,\text{raff}}}{\tau_{N,\text{raff}}} \quad (4)$$

Indichiamo nel seguito questo rapporto con  $H$ . Esso con i dati in Tab. 1 vale 1.55. Tuttavia, tenendo conto dei range di valori considerati ammissibili, esso può risultare compreso fra 1.3 e 1.9.

**Quesito n. 4 – Modello per il riscaldamento.**

Alla variazione  $dE$  di energia interna di ciascun barattolo nel tempo  $dt$  già calcolata, dovuta a conduzione e irraggiamento, occorre ora aggiungere l'energia radiante proveniente dalla lampada assorbita dal barattolo, che è proporzionale alla potenza  $P$  della lampada con un coefficiente di proporzionalità  $\alpha$  che dipende da molti fattori (distanza, dimensioni...) che sono identici per i due barattoli, e dal colore del barattolo che è diverso,  $dE_c/dt = \alpha P$ .

Sommando i tre contributi, si ha la variazione complessiva di energia interna del barattolo, che è pari alla capacità termica  $C$  per la variazione di temperatura  $dT/dt$ :

$$\frac{dE}{dt} = C \frac{dT}{dt} = \alpha P - c(T - T_{\text{amb}}) - \beta(T - T_{\text{amb}}) \quad (5)$$

All'equilibrio  $\frac{dT}{dt} = 0$ , quindi, per ciascun barattolo:

$$T_{\text{eq}} - T_{\text{amb}} = \alpha P / (c + \beta) \quad (6)$$

**Quesito n. 5 – Calcoli finali.**

Durante tutto il processo la temperatura ambiente  $T_{\text{amb}}$  è compresa fra  $T_{\text{ai}}$  e  $T_{\text{af}}$ ; è dunque accettabile considerare sia  $T_{\text{ai}}$  sia  $T_{\text{af}}$ , sia un valore intermedio, purché la scelta sia fatta in modo coerente per entrambi i barattoli.

$$T_{\text{eq},N} - T_{\text{af}} \leq \alpha_N P / (c + \beta_N) \leq T_{\text{eq},N} - T_{\text{ai}}$$

$$T_{\text{eq},B} - T_{\text{af}} \leq \alpha_B P / (c + \beta_B) \leq T_{\text{eq},B} - T_{\text{ai}}$$

Dai dati della Tab. 1 otteniamo:

$$T_{\text{eq},N} - T_{\text{af}} = 32.3^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{eq},N} - T_{\text{ai}} = 35.5^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{eq},B} - T_{\text{af}} = 16.7^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{eq},B} - T_{\text{ai}} = 18.4^\circ\text{C}$$

Tuttavia, considerando le incertezze ammesse dalla lettura del grafico, tali valori possono rientrare nei seguenti range:

$$T_{\text{eq},N} - T_{\text{af}} = 30 \div 34.5^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{eq},N} - T_{\text{ai}} = 33 \div 37.5^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{eq},B} - T_{\text{af}} = 14.5 \div 19^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{eq},B} - T_{\text{ai}} = 16 \div 20.5^\circ\text{C}$$

Possiamo eliminare il fattore incognito  $P$  scrivendo il rapporto

$$\frac{\alpha_N}{c + \beta_N} = F \frac{\alpha_B}{c + \beta_B} \quad (7)$$

dove il fattore  $F$  è compreso fra  $\frac{T_{\text{eq},N} - T_{\text{af}}}{T_{\text{eq},B} - T_{\text{af}}}$  e  $\frac{T_{\text{eq},N} - T_{\text{ai}}}{T_{\text{eq},B} - T_{\text{ai}}}$ , e quindi, con i dati in Tab. 1, risulta compreso fra 1.934 e 1.929, cioè vale 1.9 tenendo conto delle incertezze presenti anche in quei dati.

Il calcolo di tale valore numerico non è richiesto dal testo, comunque se si utilizzano i range di dati considerati ammissibili,  $F$  risulta compreso fra i valori estremi 1.6 e 2.4. Un valore sostanzialmente diverso non dipenderebbe dalle incertezze di misura e sarebbe da considerare illogico, perché non può essere giustificato utilizzare – ad esempio – la temperatura ambiente iniziale per il barattolo bianco e quella finale per il barattolo nero.

Mettendo insieme le relazioni (4) e (7) ottenute nelle due fasi, otteniamo

$$\frac{\alpha_N}{\alpha_B} = F \frac{c + \beta_N}{c + \beta_B} = FH \quad (8)$$

Il valore numerico di  $FH$  con i dati in Tab. 1 risulta 3.0. Tuttavia, per le ragioni già esposte, si può considerare ammissibile un ampio range di valori compreso entro i valori estremi 2.1 e 4.5.

L'uguaglianza fra coefficienti di emissione e assorbimento non può essere intesa come un'identità, dato che essi sono definiti in modo diverso. Ma poiché, a parte il colore dei barattoli, tutto il resto è uguale, i loro rapporti devono essere uguali. Quindi  $\alpha_N/\beta_N = \alpha_B/\beta_B$ , ovvero

$$\frac{\beta_N}{\beta_B} = \frac{\alpha_N}{\alpha_B} \quad (9)$$

e quindi, sostituendo la (9) nella (8), si ottiene  $\frac{\beta_N}{\beta_B} = F \frac{c + \beta_N}{c + \beta_B}$ .

Ma dalle stesse equazioni abbiamo anche che  $\beta_N = FH\beta_B$ , per cui, con semplici passaggi algebrici e ricordando la (4) e la (7),

$$\frac{c}{\beta_B} = \frac{H(F-1)}{H-1} = \frac{\tau_{B,\text{raff}}(T_{\text{eq},N} - T_{\text{eq},B})}{(\tau_{B,\text{raff}} - \tau_{N,\text{raff}})(T_{\text{eq},B} - T_{\text{amb}})} \quad \text{e}$$

$$\frac{c}{\beta_N} = \frac{F-1}{F(H-1)} = \frac{\tau_{N,\text{raff}}(T_{\text{eq},N} - T_{\text{eq},B})}{(\tau_{B,\text{raff}} - \tau_{N,\text{raff}})(T_{\text{eq},N} - T_{\text{amb}})}$$

In ultima analisi, quindi, il rapporto fra le perdite di energia per conduzione e per irraggiamento risulta, con i dati in Tab. 1:

$$c/\beta_B \approx 2.7 \quad c/\beta_N \approx 0.9$$

Le incertezze consentite sulla lettura del grafico possono portare a risultati numerici notevolmente diversi. Il range dei valori estremi nei limiti finora considerati risulta infatti rispettivamente fra 0.9 e 9 e fra 0.3 e 3.

### PROBLEMA n. 3 – Galleggiamento in campo magnetico

#### Quesito n. 1.

Si consideri una superficie  $S$  cilindrica, coassiale con il magnete, avente raggio  $r$  ed altezza  $h = z_2 - z_1$  e si calcoli il flusso magnetico attraverso tale superficie; per il teorema di Gauss il flusso deve essere nullo.

L'espressione del flusso magnetico si ottiene facilmente senza necessità di eseguire integrali, dato che sulle superfici di base e laterale del cilindro la componente normale del campo magnetico è uguale in ogni punto; si scrive allora

$$\Phi_S(\vec{B}) = \pi r^2 B_z(z_2) + 2\pi r(z_2 - z_1) B_r(r) - \pi r^2 B_z(z_1) = 0 \quad \text{e, sostituendo le espressioni di } B_r \text{ e } B_z,$$

$$\pi r^2 B_0(1 - \alpha z_2) + 2\pi r(z_2 - z_1) B_0 \beta r - \pi r^2 B_0(1 - \alpha z_1) = \pi B_0 r^2 [\alpha(z_1 - z_2) - 2\beta(z_1 - z_2)] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 2\beta$$

#### Quesito n. 2.

Il flusso del campo magnetico  $\vec{B}$  (esterno) concatenato all'anello, espresso in funzione di  $z$ , è

$\Phi_{\text{est}} = \Phi_{\vec{B}}(z) = \pi a^2 B_z(z)$ ; quando l'anello trasla lungo l'asse  $z$  la f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E}_1(t) = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}(z)}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB_z(z)}{dt} = \pi a^2 \alpha B_0 \frac{dz}{dt} = \pi a^2 \alpha B_0 v(t)$$

L'equazione del circuito (eq. di Kirchhoff della maglia) si può scrivere

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \pi a^2 \alpha B_0 \frac{dz}{dt} = \pi a^2 \alpha B_0 v(t)$$

**Quesito n. 3.**

Il flusso magnetico totale  $\Phi$  è dato dal contributo del campo esterno  $\vec{B}$  e da quello autoindotto

$$\Phi = \Phi_{\text{est}} + \Phi_{\text{ind}} = \pi a^2 B_z(z) + LI(t) = \pi a^2 B_0[1 - \alpha z(t)] + LI(t)$$

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{ma essendo } R = 0 \text{ allora } \Phi = \text{costante.}$$

**Quesito n. 4.**

Dalla relazione trovata sopra ( $\Phi = \text{costante}$ ), calcolando il valore di  $\Phi$  all'istante iniziale, si ha

$$\Phi(z) = \Phi(0) = \pi a^2 B_0 \Rightarrow \pi a^2 B_0[1 - \alpha z(t)] + LI(t) = \pi a^2 B_0 \Rightarrow I(t) = \frac{\pi \alpha B_0 a^2}{L} z(t)$$

In alternativa si può trovare lo stesso risultato integrando l'equazione del circuito con  $R = 0$

$$L \frac{dI}{dt} = \pi a^2 \alpha B_0 \frac{dz}{dt} \Rightarrow \int_0^t L \frac{dI}{dt} dt = \int_0^t \pi \alpha B_0 a^2 \frac{dz}{dt} dt \Rightarrow \int_{I(0)}^{I(t)} L dI = \int_{z(0)}^{z(t)} \pi \alpha B_0 a^2 dz$$

$$L [I(t) - I(0)] = \pi \alpha B_0 a^2 [z(t) - z(0)] \Rightarrow I(t) = \frac{\pi \alpha B_0 a^2}{L} z(t) \quad \text{essendo } I(0) = 0, \quad z(0) = 0$$

**Quesito n. 5.**

Si consideri l'espressione della forza di Laplace sull'anello percorso da corrente, in forma infinitesima

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

dove il vettore  $d\vec{\ell}$  è orientato in verso antiorario se visto dalla parte dell'asse  $z$  positivo, secondo la regola della mano destra. La corrente  $I$  che scorre nell'anello è positiva se segue lo stesso verso.

Scomponendo  $\vec{B}$  nelle componenti assiale (verticale) e radiale, si trova che la componente assiale di  $\vec{B}$  determina una forza radiale (uscente se  $I$  è positiva), mentre la componente radiale determina una forza assiale orientata, per  $I > 0$ , in verso opposto a  $z$ .

La somma (integrale) delle forze radiali è nulla per simmetria, mentre la somma delle forze assiali, essendo il prodotto  $IB_r$  uguale per ogni tratto  $d\ell$  nell'anello, è

$$F_z = -2\pi a I B_r(a) = -\frac{2\pi^2 \alpha \beta B_0^2 a^4}{L} z = -kz \quad \text{con} \quad k = \frac{2\pi^2 \alpha \beta B_0^2 a^4}{L} = \frac{4\pi^2 \beta^2 B_0^2 a^4}{L}$$

avendo usato la relazione  $\alpha = 2\beta^{(*)}$ . L'equazione di moto è quindi

$$m\ddot{z} = -kz - mg \Rightarrow \ddot{z} + \omega^2 z = -g \quad \text{eq. dell'oscillatore armonico, con} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4\pi^2 \beta^2 B_0^2 a^4}{mL}$$

e il periodo dell'oscillazione è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{4\pi^2 \beta^2 B_0^2 a^4}} = \frac{\sqrt{mL}}{\beta B_0 a^2}$$

**Quesito n. 6.**

La legge oraria di un oscillatore armonico è una funzione sinusoidale del tempo, di ampiezza  $A > 0$ , attorno alla posizione di equilibrio  $z = z_0$ ; questa può essere scritta genericamente in questo modo:

$$z(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + z_0 \quad \text{dove } A, z_0, \varphi \text{ sono costanti da determinare.}$$

Si deve imporre che la funzione  $z(t)$  sia soluzione dell'equazione, e che valgano le condizioni iniziali: in questo caso  $z(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ . Partendo dall'ultima si ha

$$\dot{z}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{z}(0) = -A\omega \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \quad (\text{dovendo essere } A \neq 0). \text{ Fissato } \varphi \text{ si ha}$$

$$z(0) = A + z_0 \Rightarrow z_0 = -A \quad (\text{risulta quindi } z_0 < 0) \text{ e per l'equazione di moto}$$

$$\ddot{z}(t) = -A\omega^2 \cos \omega t \Rightarrow -A\omega^2 \cos \omega t + \omega^2 (A \cos \omega t + z_0) = -g$$

Si ottiene infine

$$\omega^2 z_0 = -\omega^2 A = -g \Rightarrow z_0 = -A = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{mgL}{4\pi^2 \beta^2 B_0^2 a^4}$$

$$z(t) = z_0 (1 - \cos \omega t) \leq 0 \quad \text{ad ogni istante.}$$

(\*) NOTA: Non è richiesto che si operi necessariamente questa sostituzione.

*Soluzione alternativa*

Il moto è oscillatorio intorno alla posizione  $z_0$  dove l'accelerazione è nulla

$$\ddot{z} = 0 \quad \text{per} \quad z_0 = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{mgL}{4\pi^2\beta^2 B_0^2 a^4} < 0$$

Operando un cambiamento di coordinate, con origine in  $z_0$ , si pone  $Z = z - z_0$  da cui  $\ddot{Z} = \ddot{z}$  l'equazione si semplifica in

$$\ddot{Z} + \omega^2 Z = 0 \quad \text{con} \quad Z(0) = -z_0 \quad \text{e} \quad \dot{Z}(0) = 0$$

Le leggi orarie, per le coordinate  $Z$  e  $z$  risultano

$$Z(t) = A \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad z(t) = z_0 + A \cos \omega t$$

La condizione  $z(0) = 0$  dà  $A = -z_0$  per cui

$$z(t) = z_0 (1 - \cos \omega t) \quad (\text{come sopra}).$$

**Quesito n. 7.**

Riprendendo il risultato ottenuto al punto 4, la corrente  $I(t)$  è data da

$$I(t) = \frac{\pi \alpha B_0 a^2}{L} z(t) = \frac{2\pi \beta B_0 a^2}{L} z(t) = \frac{2\pi \beta B_0 a^2}{L} (1 - \cos \omega t) z_0$$

Anche la corrente risulta sempre negativa, e ciò significa che appare ruotare in verso orario se viene osservata dalla parte positiva dell'asse  $z$ , cioè dall'alto verso il basso.

Il massimo del modulo della corrente si ha per  $\cos \omega t = -1$  e vale

$$|I_{\max}| = \frac{4\pi \beta B_0 a^2}{L} |z_0| = \frac{4\pi \beta B_0 a^2}{L} \frac{mgL}{4\pi^2 \beta^2 B_0^2 a^4} = \frac{mg}{\pi \beta B_0 a^2}$$

quando l'anello è nella posizione più bassa

$$z_{\min} = 2z_0 = -\frac{mgL}{2\pi^2 \beta^2 B_0^2 a^4}$$

*Materiale elaborato dal Gruppo*



**PROGETTO OLIMPIADI**  
*Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica*  
 e-mail: [olifis@aif.it](mailto:olifis@aif.it) - fax: 041.584.1272  
 WEB: [www.olifis.it](http://www.olifis.it)

**NOTA BENE**

È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.