OLIMPIADI DI FISICA

Senigallia – 9 Aprile 2010

Gara Nazionale: SOLUZIONE della Prova Teorica

PROBLEMA n. 1 – Viaggio in galleria

90 Punti

Quesito n. 1.
Nel caso elettrostatico, dal Teorema di Gauss, si ottiene che il campo interno alla distribuzione uniforme di carica negativa vale

$\vec{E}(r) = -\dfrac{E_0}{R}\,\vec{r}$ dove E_0 è il modulo del campo per $r = R$. In analogia avremo

$\vec{g}(r) = -\dfrac{g_0}{R}\,\vec{r}$

dove R è il raggio della Terra e g_0 l'accelerazione di gravità standard (a livello del mare).

Quesito n. 2.
Detta x la proiezione del vettore $\vec{r}$ lungo la galleria, l'equazione di moto è quella di un moto armonico:

$$m\ddot{x} = -m\frac{g_0}{R}\,x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{g_0}{R} \quad \Rightarrow \quad T_\text{o} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

essendo T_o il periodo di un'oscillazione completa. La durata del viaggio (T) è metà del periodo:

$T = \pi\sqrt{R/g_0} = 2.53 \times 10^3\,\mathrm{s} \approx 42\,\mathrm{min}$ (indipendente dalla latitudine φ !)

Quesito n. 3.
La velocità massima si trova con la conservazione dell'energia o con la legge oraria:

$\dfrac{1}{2}mv_\text{max}^2 = U_\text{max} - U_\text{min}$ dove, per simmetria, l'energia potenziale U è funzione solo di r :

$$U(r) = U(0) - \int_0^r m\,\vec{g}(r)\cdot d\vec{r} = -\int_0^r m\,g(r)\,dr = m(g_0/2R)r^2$$

avendo posto $\vec{g}(r) = g(r)\,\hat{r} = -(g_0/R)\,\vec{r}$ e $U(0) = 0$.

Essendo poi $r_\text{max} = R$ ed $r_\text{min} = R\,\mathrm{sen}\,\varphi$ si trova

$$\Delta U = U_\text{max} - U_\text{min} = m\frac{g_0}{2R}\left(R^2 - R^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right) = \frac{1}{2}mg_0R\cos^2\varphi \quad \text{e quindi}$$

$v_\text{max} = \sqrt{2\Delta U/m} = \sqrt{g_0\,R}\,\cos\varphi = 3.95\,\mathrm{km/s}$.

Oppure

$$x(t) = A\cos\omega t \quad \text{con} \quad A = R\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad v(t) = -R\omega\,\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_\text{max} = R\omega\,\cos\varphi = \sqrt{g_0\,R}\,\cos\varphi$$

Quesito n. 4.

La rotazione terrestre nel riferimento (non inerziale) della Terra determina una forza centrifuga opposta alla componente del campo parallela alla galleria: $F_c = m\,\Omega^2 x$. Questa dunque non altera l'equazione ma ne modifica solo un coefficiente.

$$m\ddot{x} = -m[(g_0/R) - \Omega^2)]x \quad \Rightarrow \quad \omega'^{\,2} = (g_0/R) - \Omega^2 \quad \Rightarrow \quad T'_o = \frac{2\pi}{\sqrt{(g_0/R) - \Omega^2}}$$

Numericamente

$$g_0/R = 1.54\times 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-2} \quad \text{e} \quad \Omega^2 = \frac{4\pi^2}{T_g^2} = (7.29\times 10^{-5})^2 = 5.32\times 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}$$

essendo T_g la durata del giorno.

Si può quindi approssimare la soluzione ponendo

$$\frac{g_0}{R} - \Omega^2 = \left(1 - \frac{R\,\Omega^2}{g_0}\right)\frac{g_0}{R} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{g_0}{R} - \Omega^2\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{R\,\Omega^2}{2g_0}\right)\left(\frac{g_0}{R}\right)^{-1/2}$$

$$T' = \frac{1}{2}T'_o = \pi\left(\frac{g_0}{R} - \Omega^2\right)^{-1/2} \approx \left(1 + \frac{R\,\Omega^2}{2g_0}\right)\pi\sqrt{\frac{g_0}{R}} = \left(1 + \frac{R\,\Omega^2}{2g_0}\right)T$$

La variazione (positiva) è quindi

$$\delta T = \frac{R\,\Omega^2}{2g_0}\,T \approx 4\,\mathrm{s}$$

Si osservi che nel riferimento non inerziale si dovrebbe considerare anche la forza di Coriolis ($F_{\mathrm{Cor}} = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}$); questa però risulta sempre perpendicolare alla direzione del moto e in questo caso è annullata dalla reazione vincolare.

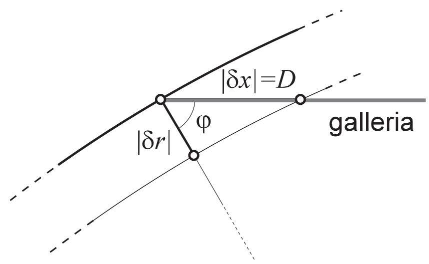
Quesito n. 5.

Sia η la frazione di energia persa in un viaggio (semi-oscillazione completa). La condizione è che

$$\delta U = -\eta\Delta U \quad \text{con} \quad \eta = 0.01$$

Ma dall'espressione $U(r)$ vista al punto 3. si ricava

$$\frac{\delta U}{U(r)} = 2\frac{\delta r}{r}$$



Per $r = R$ si ha $\delta r = \dfrac{R}{2}\dfrac{\delta U}{U(R)} = -\dfrac{R}{2}\dfrac{\eta\,\Delta U}{U(R)}$

$$\delta r = -\frac{\eta\,R}{2}\frac{mg_0R\,\cos^2\varphi}{2}\frac{2}{mg_0R} = -\frac{1}{2}\eta R\,\cos^2\varphi$$

La distanza dalla stazione di arrivo si ottiene infine come

$$D = \left|\frac{\delta r}{\cos\varphi}\right| = \frac{1}{2}\eta R\,\cos\varphi \approx 15.9\,\mathrm{km}$$

Anche qui, in alternativa, si poteva considerare come energia potenziale quella legata al moto armonico (come nel caso di una molla) data da

$$U' = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{con} \quad k = \frac{m\,g_0}{R}$$

Si vede subito che questa differisce da quella gravitazionale – calcolata sopra – solo per un termine costante che quindi risulta ininfluente:

$$U(r) = \frac{1}{2}\frac{m\,g_0}{R}r^2 = \frac{1}{2}\frac{m\,g_0}{R}x^2 + \frac{1}{2}\frac{m\,g_0}{R}y^2 = U'(x) + \mathrm{cost}$$

dove y è la distanza della galleria dal centro della Terra.

La condizione si esprime ora come

$$\delta U' = -\eta\,\Delta U' \quad \text{e} \quad \frac{\delta U'}{U'(x)} = 2\frac{\delta x}{x} \quad \Rightarrow \quad \delta x = -\frac{\eta\,x}{2}\frac{\Delta U'}{U'(x)}$$

Per $x = R\cos\varphi$ e $\Delta U' = U'(R\cos\varphi)$ si ritrova

$$D = |\delta x| = \frac{1}{2}\,\eta R\cos\varphi$$

Quesito n. 6.

Se l'oscillazione si dimezza in ampiezza, l'energia totale diventa 1/4 di quella iniziale, mentre il periodo di oscillazione non cambia. Si può quindi scrivere nuovamente

$$\delta U = -\eta U \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta U}{T} = -\eta\frac{U}{T}$$

Se la variazione di energia è lenta si può confondere il rapporto incrementale con la derivata (vedi suggerimento in termini di potenza media e istantanea) e scrivere

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\eta}{T}\,U \quad \Rightarrow \quad U(t) = U_0\,e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = T/\eta \quad \text{e} \quad U_0 = U(R)$$

La condizione da imporre è

$$U(NT) = \frac{1}{4}U_0 \quad \Rightarrow \quad e^{-NT/(T/\eta)} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \eta N = \ln 4$$

L'ampiezza si sarà dimezzata dopo

$$N = \frac{\ln 4}{\eta} \approx 139 \quad \text{viaggi.}$$

Quesito n. 7.

Nel modello della Terra a due strati, con nucleo pesante, il campo gravitazione nel nucleo cresce linearmente con r ed è ovviamente maggiore che nel caso visto prima. Questo è vero anche nel mantello; infatti la densità del mantello è necessariamente minore di quella della Terra omogenea e di conseguenza, fissata una superficie sferica di raggio r nella regione del mantello, la massa esterna è certamente minore rispetto al caso della Terra omogenea. Di conseguenza la massa della parte interna alla superficie è sempre maggiore ed è quindi maggiore anche il campo gravitazionale; dunque il viaggio durerà meno.

Il moto però non è più armonico dato che, solo per una distribuzione omogenea, vale la dipendenza lineare tra campo e distanza dal centro.

PROBLEMA n. 2 – Ciclo termodinamico

90 Punti

Quesito n. 1.

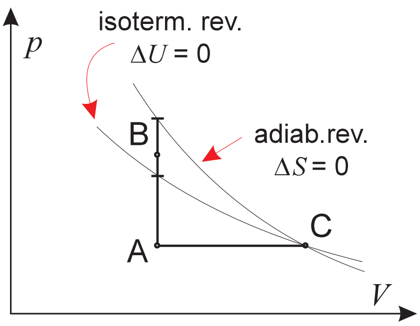
Per la trasformazione isobara:

$$\frac{T_\text{A}}{V_\text{A}} = \frac{T_\text{C}}{V_\text{C}} \quad \Rightarrow \quad T_\text{C} = 2T_\text{A} = 580\,\text{K}$$

$$Q_{\text{C}\to\text{A}} = nc_p(T_\text{A} - T_\text{C}) = \frac{7}{2}nRT_\text{A} = -\frac{7}{2}8.31\,\text{J}\,\text{K}^{-1}290\,\text{K} = -8.43\,\text{kJ}$$

valido qualunque sia lo stato B.

Quesito n. 2.



La temperatura T_B nello stato B deve essere maggiore o uguale a T_C, ovvero, nel piano $p - V$, B deve stare sopra l'isoterma per C. Infatti nell'espansione adiabatica il lavoro è positivo a spese dell'energia interna e dunque la temperatura può solo diminuire o restare uguale (per lavoro nullo, come caso estremo). Ne segue che

$$(T_B)_{\min} = T_C = 580\,\mathrm{K}$$

Al tempo stesso, poiché le adiabatiche reversibili sono curve isoentropiche, il punto B deve stare sotto l'adiabatica reversibile per C dato che l'entropia può solo aumentare o al massimo restare costante (se la trasformazione del gas fosse un'adiabatica reversibile). Il massimo, o meglio, l'estremo superiore per la temperatura T_B può essere calcolato su una trasformazione adiabatica reversibile ove $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$, dove $\gamma = c_p/c_V = 7/5$ nel caso di gas biatomico. Quindi

$$(T_B)_{\sup} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} T_C = 2^{2/5}\,T_C = 765\,\mathrm{K}$$

Il ragionamento svolto sopra può essere sviluppato a partire dalle stesse premesse discutendo i diversi contributi di calore e lavoro per determinare il valore minimo di T_B e calcolando la variazione di entropia per il valore massimo. Nel seguito si indicheranno con c_p e c_V i calori molari, rispettivamente a pressione e volume costante.

Per un ciclo termodinamico $\Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = L$

$$Q_{A\to B} = nc_V(T_B - T_A) = \frac{5}{2}nR\,(T_B - T_A) \quad \text{assorbito durante l'isocora}$$

$$Q_{B\to C} = 0 \quad \text{essendo un'adiabatica}$$

$$Q_{C\to A} = nc_p(T_A - T_C) = \frac{7}{2}nR\,(T_A - T_C) \quad \text{ceduto durante l'isobara}$$

$$L_{A\to B} = 0 \quad \text{perché non c'è variazione di volume}$$

$$L_{B\to C} \geq 0 \quad \text{lavoro fatto verso l'esterno nell'abiabatica irreversibile}$$

$$L_{C\to A} = p\,\Delta V = nR\,(T_A - T_C) < 0 \quad \text{perché il gas viene compresso}$$

Per il primo principio si ha dunque

$$Q_{A\to B} + Q_{C\to A} = L_{B\to C} + L_{C\to A} \quad \Rightarrow \quad L_{B\to C} = nc_V(T_B - T_A) + nc_p(T_A - T_C) - nR(T_A - T_C) =$$

$$= nc_V T_B + n(-c_V + c_p - R)T_A - n(c_p - R)T_C = nc_V(T_B - T_C)$$

Trattandosi di un'espansione il lavoro deve essere non negativo per cui

$$(T_B - T_C) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad T_B \geq T_C$$

Per l'espansione adiabatica irreversibile deve essere $\Delta S > 0$, ovvero

$$\Delta S_{B\to C} = nR\ln\frac{V_C}{V_B} + nc_V\ln\frac{T_C}{T_B} = nR\left(\ln 2 + \frac{5}{2}\ln\frac{T_C}{T_B}\right) > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{T_C}{T_B} > -\frac{2}{5}\ln 2 \quad \Rightarrow \quad T_B < 2^{2/5}\,T_C$$

In definitiva, per la temperatura dello stato B valgono le condizioni

$$580\,\mathrm{K} \leq T_B < 765\,\mathrm{K}$$

Quesito n. 3.

Il ciclo svolto dal gas è stato definito termico se il gas compie lavoro sull'esterno: $L > 0$ e quindi anche $Q > 0$; in altre parole il gas assorbe più calore di quanto ne cede; al contrario se il lavoro è fatto sul gas dall'esterno ($L < 0$ e $Q < 0$) allora esegue un ciclo frigorifero.

Il valore particolare di T_B per cui il ciclo cambia da frigorifero a termico si ottiene quindi imponendo che $Q = Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}} = 0$ ovvero $Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -Q_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}}$

$$\frac{5}{2}nR\,(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = \frac{7}{2}nR\,(T_\mathrm{C} - T_\mathrm{A}) \quad \Rightarrow \quad 2T_\mathrm{A} + 5T_\mathrm{B} - 7T_\mathrm{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{B} = \frac{12}{5}T_\mathrm{A} = 696\,\mathrm{K}\,.$$

Alternativamente:

$$nc_V(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = nc_p(T_\mathrm{C} - T_\mathrm{A}) \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{B} = \frac{1}{c_V}\left(c_V T_\mathrm{A} + c_p T_\mathrm{A}\right) = (1+\gamma)\,T_\mathrm{A} = \frac{12}{5}T_\mathrm{A}$$

detta T_0 tale temperatura, si ha che per $T_\mathrm{B} < T_0$ il ciclo è frigorifero, mentre per $T_\mathrm{B} > T_0$ il ciclo è termico.

Come caso superiore estremo si ha quello di un'adiabatica reversibile che rende reversibile l'intero ciclo: notare che solo in questo caso il lavoro è calcolabile attraverso l'area del piano $p - V$ delimitata dalla curva che rappresenta il ciclo e solo in questo caso il verso orario di percorrenza del ciclo conferma che si tratta di un ciclo termico.

Quesito n. 4.

Il rendimento di un ciclo termico è

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

dove Q è il calore complessivamente scambiato, mentre Q_1 e Q_2 sono quelli effettivamente assorbito e ceduto ($Q_1 > 0, Q_2 < 0$). Il rendimento è quindi una funzione della temperatura T_B:

$$\eta(T_\mathrm{B}) = 1 - \frac{Q_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}}}{Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}} = 1 - \frac{n\,c_p(T_\mathrm{C} - T_\mathrm{A})}{n\,c_V(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A})} = 1 - \frac{c_p T_\mathrm{A}}{c_V(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A})} = 1 - \gamma\,\frac{1}{T_\mathrm{B}/T_\mathrm{A} - 1}$$

L'espressione del rendimento, valida per $696\,\mathrm{K} < T_\mathrm{B} < 765\,\mathrm{K}$, è una funzione monotona crescente di T_B.

Numericamente risulta: $\eta(696\,\mathrm{K}) = 0$ ed $\eta(765\,\mathrm{K}) = 0.15$

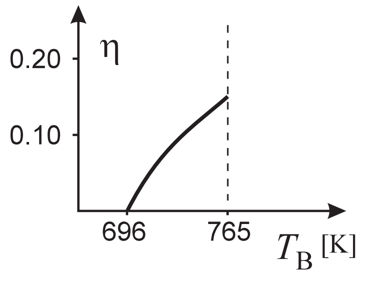
L'efficienza frigorifera

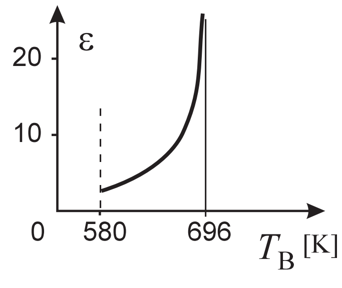
$$\varepsilon = \frac{Q_1}{|L|} = \frac{Q_1}{|Q|} = \frac{Q_1}{|Q_2| - Q_1} = \frac{1}{|Q_2|\,/Q_1 - 1} \quad \text{è pure una funzione monotona crescente di } T_\mathrm{B}:$$

$$\varepsilon(T_\mathrm{B}) = \frac{1}{|Q_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}}|\,/Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} - 1} = \left(\frac{n\,c_p T_\mathrm{A}}{n\,c_V(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A})} - 1\right)^{-1} = \left(\frac{\gamma}{T_\mathrm{B}/T_\mathrm{A} - 1} - 1\right)^{-1}$$

Si ricava: $\varepsilon(580\,\mathrm{K}) = 2.5$ ed $\varepsilon(T_\mathrm{B} \to 696\,\mathrm{K}) \to \infty$.

I grafici dei due parametri sono riportati qui sotto.



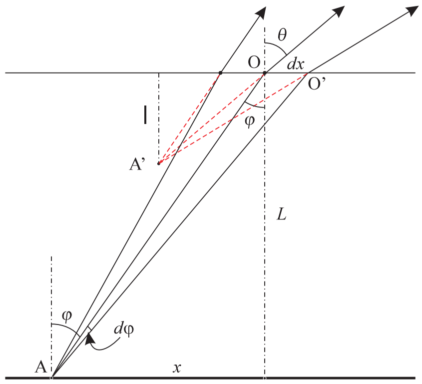


PROBLEMA n. 3 – Esplorando il fondo

50 Punti

Quesito n. 1.

Si consideri un arbitrario punto A del fondo della vasca, a distanza x dal piede della perpendicolare condotta dal punto di osservazione O, e il raggio di luce che partendo da questo punto arriva nello stesso punto O. A causa della rifrazione subita dalla luce nel passaggio dall'acqua all'aria, esso sembra essere emesso da un punto A$'$, come mostrato in figura.



In termini dell'angolo φ mostrato in figura, si ha $x = L \operatorname{tg} \varphi$.

Il raggio che parte da A, con un angolo φ rispetto alla verticale, passa per O; invece un raggio adiacente che parte con angolo $\varphi + d\varphi$ giunge alla superficie di separazione in un punto distante da O di una quantità dx data da

$$x + dx = L \operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) \quad \Rightarrow \quad dx = L\left[\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) - \operatorname{tg}\varphi\right] \quad \Rightarrow \quad dx = L\left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) - \operatorname{tg}\varphi}{d\varphi}\right] d\varphi$$

e, considerando che per $d\varphi \to 0$ l'espressione tra parentesi quadra è la derivata della funzione $\operatorname{tg}\varphi$, si ha

$$dx = \frac{L}{\cos^2\varphi} d\varphi \qquad (1)$$

Nota: Si poteva giungere allo stesso risultato differenziando l'espressione iniziale:

$$x = L \operatorname{tg}\varphi \quad \Rightarrow \quad dx = L\, d(\operatorname{tg}\varphi) \quad \Rightarrow \quad dx = L\, \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

Analogamente, indicando con ℓ la profondità del punto A$'$, si ha che

$$x = \frac{\ell}{\cos^2\vartheta} d\vartheta \qquad (2)$$

Differenziando la Legge di Snell, $\operatorname{sen}\vartheta = n \operatorname{sen}\varphi$, si ottiene

$$d\,(\operatorname{sen}\vartheta) = n d\,(\operatorname{sen}\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta\, d\vartheta = n \cos\varphi\, d\varphi \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{1}{n}\frac{\cos\vartheta}{\cos\varphi} d\vartheta\,.$$

Sostituendo nella (1) l'espressione per $d\varphi$ appena ottenuta, si ricava

$$dx = \frac{L}{n}\frac{\cos\vartheta}{\cos^3\varphi} d\vartheta \qquad (3)$$

ed uguagliando le espressioni (2) e (3) si ottiene infine

$$\ell = \frac{L}{n}\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\varphi}\right)^3 \qquad (4)$$

Sempre da $x = L \operatorname{tg}\varphi$ si ricava che

$$\frac{x}{L} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{1+(x/L)^2}$$

D'altra parte, applicando la Legge di Snell, si può anche scrivere

$$\frac{x}{L} = \frac{\operatorname{sen}\vartheta/n}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}\vartheta/n)^2}} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{1-\cos^2\vartheta}{n^2-1+\cos^2\vartheta} \quad\Rightarrow\quad \cos^2\vartheta = \frac{1+(1-n^2)(x/L)^2}{1+(x/L)^2}$$

In ultima analisi

$$\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\varphi}\right)^2 = 1-(n^2-1)\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

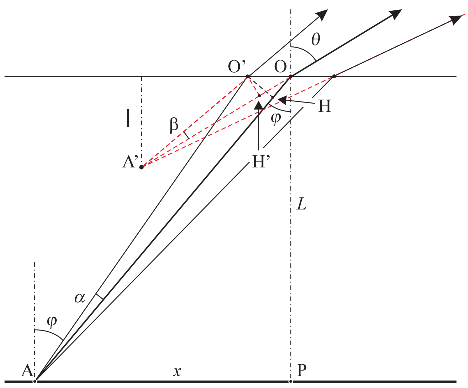
che sostituita nella (4) fornisce

$$\ell = \frac{L}{n}\left[\sqrt{1-(n^2-1)\left(\frac{x}{L}\right)^2}\,\right]^3 \tag{5}$$

———————————

Soluzione alternativa

Come prima, oltre al raggio uscente da A e passante per O, si consideri un secondo raggio che forma con il primo un angolo piccolo α e che attraversa la superficie dell'acqua in un punto O$'$.



La profondità ℓ di A$'$ si può esprimere in funzione della profondità effettiva L, della distanza x e dell'indice di rifrazione n considerando che il segmento OO$'$ è un lato comune dei due triangoli OHO$'$ e OH$'$O$'$.

Da semplici considerazioni geometriche si ricava che $\widehat{\mathrm{OO'H}} = \varphi$ e $\widehat{\mathrm{OO'H'}} = \vartheta$. Dalla geometria del sistema si ricavano successivamente

$$\overline{\mathrm{A'O'}} = \frac{\ell}{\cos(\vartheta-\beta)}; \quad \overline{\mathrm{O'H'}} = \overline{\mathrm{A'O'}}\operatorname{sen}\beta = \ell\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos(\vartheta-\beta)}; \quad \overline{\mathrm{OO'}} = \frac{\overline{\mathrm{O'H'}}}{\cos\vartheta} = \ell\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos(\vartheta-\beta)\,\cos\vartheta}\,. \tag{1'}$$

Analogamente

$$\overline{\mathrm{AO'}} = \frac{L}{\cos(\varphi-\alpha)}; \quad \overline{\mathrm{O'H}} = \overline{\mathrm{AO'}}\operatorname{sen}\alpha = L\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}; \quad \overline{\mathrm{OO'}} = \frac{\overline{\mathrm{O'H}}}{\cos\varphi} = L\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)\,\cos\varphi}\,. \tag{2'}$$

Uguagliando la (1$'$) e la (2$'$) si ottiene

$$\ell = L\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\,\cos\vartheta\,\cos(\vartheta-\beta)}{\operatorname{sen}\beta\,\cos\varphi\,\cos(\varphi-\alpha)}\,.$$

Ricordando che la divergenza del fascio è molto piccola si può approssimare $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{sen}\beta \approx \beta$ e $\cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1$; pertanto l'espressione precedente diventa

$$\ell = L\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\varphi}\right)^2\frac{\alpha}{\beta}\,. \tag{3'}$$

La legge di Snell applicata nei punti O e O′ fornisce rispettivamente

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\operatorname{sen}\varphi} = n\,, \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}(\vartheta-\beta)}{\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)} = n\,.$$

Con l'approssimazione introdotta e tenendo presente la prima espressione, dalla seconda si ottiene

$$\operatorname{sen}\vartheta - \beta\cos\vartheta = n\operatorname{sen}\varphi - n\alpha\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \beta\cos\vartheta = n\alpha\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{\beta}{\alpha} = n\,\frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta}\,.$$

Sostituendo quest'ultima nella (3') si ottiene

$$\ell = \frac{L}{n}\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\varphi}\right)^3 \qquad (4')$$

che coincide con la (4). La legge di Snell, espressa in termini dei coseni degli angoli si può scrivere

$$\frac{1-\cos^2\vartheta}{1-\cos^2\varphi} = n^2 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\vartheta = 1 - n^2(1-\cos^2\varphi) = n^2\cos^2\varphi - (n^2-1)$$

Dunque

$$\left(\frac{cos\vartheta}{\cos\varphi}\right)^2 = n^2 - \frac{n^2-1}{\cos^2\varphi} = n^2 - (n^2-1)(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = 1-(n^2-1)\operatorname{tg}^2\varphi$$

Infine, ricordando che $\operatorname{tg}\varphi = x/L$, dall'espressione precedente si ha $\dfrac{\cos\vartheta}{\cos\varphi} = \sqrt{1-(n^2-1)+\left(\dfrac{x}{L}\right)^2}$

e la (4') – in funzione di L, n ed x – si scrive come

$$\ell = \frac{L}{n}\left[\sqrt{1-(n^2-1)\,\left(\frac{x}{L}\right)^2}\,\right]^3\,. \qquad (5')$$

Quesito n. 2.

Come si può anche comprendere dalla figura, la posizione geometrica ℓ dell'immagine A′ diminuisce al crescere di ϑ, quindi si ha $\ell_{\min}$ quando $\vartheta = 90°$ e $\ell_{\max}$ quando $\vartheta = 0°$.

Per $\vartheta = 90°$, $\cos\vartheta = 0$, $\operatorname{sen}\varphi = 1/n$ e $\cos\varphi = \sqrt{n^2-1}/n$, per cui dalla (4) si ha $\ell_{\min} = 0$.

Per $\vartheta = 0°$ anche $\varphi = 0°$ ovvero $x = 0$, per cui dalla (5) si ha $\ell_{\max} = L/n$.

Quesito n. 3.

Il massimo valore di x si ha quando il valore sotto la radice quadrata nella (5) si annulla (non può essere negativo per ℓ reale) quindi

$$x_{\max} = \frac{L}{\sqrt{n^2-1}}$$

e l'area della superficie complessiva del fondale che può essere osservata è

$$S = \pi x_{\max}^2 = \frac{\pi L^2}{n^2-1}$$

PROBLEMA n. 4 – Correnti in un anello

70 Punti

Quesito n. 1.

La resistenza equivalente tra i punti A e B è data da

$$R^\star = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{con} \quad R_i = \frac{\rho \ell_i}{\sigma}$$

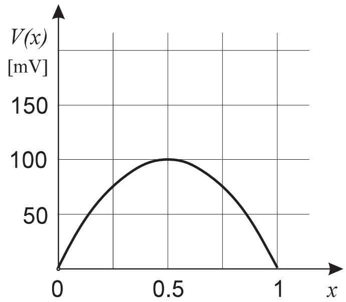
essendo σ l'area della sezione del filo; essendo $R_1 + R_2 = \rho L/\sigma$ si ha

$$R^\star = \frac{\rho}{\sigma}\frac{\ell_1 \ell_2}{L} = x(1-x)\frac{\rho L}{\sigma}$$

A corrente costante (I_0) la massima d.d.p. si ha quando è massima la resistenza equivalente cioè per $x = 1/2$, ovvero quando B è diametralmente opposto ad A. Si ha

$$R^\star_{\max} = \frac{1}{4}\frac{\rho\, L}{\sigma} = \frac{V_0}{I_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\rho\, L\, I_0}{4V_0} \quad \text{da cui infine} \quad d = 2r = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} = \sqrt{\frac{\rho\, L\, I_0}{\pi V_0}} = 0.624\,\text{mm}$$

Quesito n. 2.



La d.d.p. è proporzionale alla resistenza equivalente:

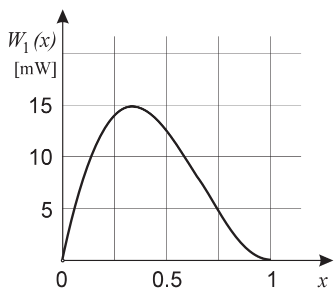
$$V(x) = I_0\, R^\star(x) = x(1-x) I_0\, R \quad \text{con} \quad R = R_1 + R_2 = \rho L/\sigma = 1.6\,\Omega$$

Notare che la d.d.p. può essere valutata in due modi equivalenti

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2 \quad \text{da cui} \quad \ell_1 I_1 = \ell_2 I_2 \quad \text{(servirà dopo)}$$

Il grafico richiesto di $V(x)$ è riportato a fianco.

Quesito n. 3.



Posto che $R_1 = xR$ ed $R_2 = (1-x)R$, la potenza dissipata nel primo arco è

$$W_1 = R_1\, I_1^2 \quad \text{con} \quad I_1 = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = I_0 \frac{R_2}{R} \quad \text{(partitore di corrente).}$$

Dunque

$$W_1(x) = xR\, I_0^2 \frac{(1-x)^2 R^2}{R^2} = x(1-x)^2\, I_0^2 R$$

Notare che $W_1(x)$ non è simmetrica rispetto a $x = 1/2$.

Il massimo di W_1 si trova derivando

$$\frac{dW_1(x)}{dx} = \left[(1-x)^2 - 2x(1-x)\right]\, I_0^2 R = (1-x)(1-3x) I_0^2 R = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$W_{1,\max} = \frac{4}{27}\, I_0^2 R = 14.8\,\text{mW} \quad \text{quando i fili formano un angolo di } 120°.$$

Anche qui, a fianco è riportato il grafico della funzione $W_1(x)$.

Quesito n. 4.

Il campo magnetico al centro dell'anello è nullo in ogni caso. Infatti, ricordando l'espressione di Laplace per il calcolo del campo magnetico,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\gamma \frac{\vec{d\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

il contributo dei due fili rettilinei è nullo essendo questi allineati col centro dell'anello (e quindi $\vec{d\ell} \times \hat{r} = 0$) e per i due archi percorsi da correnti in verso opposto, detto a il raggio dell'anello [$a = L/(2\pi)$], si ha

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2a}\frac{\ell_1}{L} - \frac{\mu_0 I_2}{2a}\frac{\ell_2}{L} = \frac{\mu_0 \pi}{L^2}(\ell_1 I_1 - \ell_2 I_2) \quad \text{ma} \quad \ell_1 I_1 - \ell_2 I_2 = 0 \quad \text{come si è visto al punto 2.}$$

Quesito n. 5.

Le risposte 1, 2 e 3 non cambiano; cambia invece il campo magnetico al centro dell'anello.

Adesso esso è dovuto al filo perpendicolare ed è quindi nel piano dell'anello; il suo modulo è comunque indipendente dalla posizione di B (quindi da x) e può essere ricavato dall'espressione di Laplace data sopra, o più semplicemente con considerazioni di simmetria, osservando che due tratti infinitesimi di filo disposti simmetricamente rispetto ad un piano ortogonale al filo stesso, danno uguali contributi al campo calcolato in un punto qualunque del piano.

Dunque il modulo del campo è metà di quello di un filo rettilineo indefinito e vale

$$B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I_0}{2L} = 0.157\,\mu\mathrm{T}$$

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica

presso Liceo Scientifico "U. Morin"

VENEZIA MESTRE

fax: 041.584.1272

e-mail: olifis@libero.it