

## OLIMPIADI DI FISICA

Senigallia – 17 Aprile 2009

Gara Nazionale: SOLUZIONE della Prova Teorica

### PROBLEMA n.1 – La Luna di Galileo

#### Quesito n. 1.

Siano  $R_{\odot}$  ed  $R$  i raggi di Sole e Luna rispettivamente,  $D_{\odot}$  e  $D$  le distanze del Sole e della Luna dalla Terra ( $\odot$  è il simbolo che indica il Sole fin dall'astronomia antica, ma anche oggi). Sapendo che la distanza focale dello specchio è uguale a  $R/2$ , e tenuto conto che  $D \ll D_{\odot}$ , l'immagine del Sole al plenilunio (quindi parassiale) è un disco di raggio

$$R_{\text{imm}} = \frac{R/2}{D_{\odot} + D} R_{\odot} \approx \frac{R_{\odot}}{D_{\odot}} \frac{R}{D} \frac{D}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 D = 4.2 \text{ km} \quad \text{essendo} \quad \varepsilon = 0^{\circ}32' = \frac{1}{107} \text{ rad}$$

E il diametro angolare di tale immagine vista da Terra – trascurando adesso  $R/2$  rispetto a  $D$  – sarebbe

$$\varepsilon' = \frac{2R_{\text{imm}}}{D + R/2} \approx \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \approx 2.2 \times 10^{-5} \text{ rad} = 4.5''.$$

#### Quesito n. 2.

Vista da Terra, la frazione  $\eta$  del disco lunare che appare illuminata dal Sole è pari al rapporto tra la superficie dell'immagine virtuale del Sole e quella del disco lunare, ovvero

$$\eta = \frac{\pi R_{\text{imm}}^2}{\pi R^2} = \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)^2 = \left( \frac{\varepsilon}{4} \right)^2 \approx 6 \times 10^{-6}$$

Si vedrebbe dunque un solo punto luminoso e la Luna, tutta buia, non si vedrebbe.

Quindi, dice bene Galileo:

*Quando dunque la Luna fusse tersa come uno specchio, piccolissima parte si mostrerebbe a gli occhi di un particolare illustrata dal Sole, ancorché tutto un emisferio fusse esposto a' raggi solari, ed il resto rimarrebbe all'occhio del riguardante come non illuminato e perciò invisibile...*

#### Quesito n. 3.

La luminosità della Luna ovvero la luce emessa in tutto lo spazio (in modo isotropo) sarebbe pari a quella ricevuta dal Sole

$$L = L_{\odot} \frac{\pi R^2}{4\pi D_{\odot}^2} \quad \text{e il rapporto dei flussi misurati a Terra sarebbe}$$

dove  $L_{\odot}$  è la luce emessa in tutto lo spazio dal Sole.

$$\frac{\Phi}{\Phi_{\odot}} = \frac{L}{4\pi D^2} \frac{4\pi D_{\odot}^2}{L_{\odot}} = \frac{R^2}{4D^2} \quad \text{da cui}$$

$$m - m_{\odot} = 2.5 \log \frac{\Phi_{\odot}}{\Phi} = 2.5 \log \frac{4D^2}{R^2} = 5 \log \frac{2D}{R} \approx 5 \log 428 = 13.15 \quad \Rightarrow \quad m = m_{\odot} + 13.15 = -13.6$$

**Quesito n. 4.**

La differenza di magnitudine  $[\Delta m = -13.6 - (-12.7) = -0.9]$  è dovuta alla luce assorbita e alla diversa distribuzione angolare di quella riemessa.

$$\Delta m = 2.5 \log \frac{\Phi}{\Phi_0} \Rightarrow A = \frac{\Phi}{\Phi_0} = 10^{(\Delta m/2.5)} = 10^{-0.36} \approx 0.44$$

Tenuto conto del fatto che al plenilunio la superficie lunare appare 6 volte più luminosa della media si può stimare che l'albedo sia  $A \approx 0.07$ .

Quindi, nonostante l'apparenza, la superficie lunare è di colore grigio molto scuro, tendente al nero.

## PROBLEMA n. 2 – Fasci colorati

**Quesito n. 1.**

La frequenza della radiazione non cambia nel passaggio dall'aria al vetro; è  $\nu = c/\lambda = 5.488 \times 10^{14}$  Hz.

La velocità di propagazione è data da  $V = c/n = 2.025 \times 10^8$  m s<sup>-1</sup>; la lunghezza d'onda nel mezzo è  $\lambda_V = V/\nu = \lambda/n = 369.0$  nm.

**Quesito n. 2.**

Indicando col pedice “a” i dati per il laser ad argon e col pedice “s” quelli per il laser a semiconduttore, possiamo scrivere

$$n_a = a + \frac{b}{\lambda_a^2} \quad \text{e} \quad n_s = a + \frac{b}{\lambda_s^2}, \quad \text{da cui possiamo ricavare le costanti } a \text{ e } b:$$

$$a = \frac{n_s \lambda_s^2 - n_a \lambda_a^2}{\lambda_s^2 - \lambda_a^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{(n_a - n_s) \lambda_a^2 \lambda_s^2}{\lambda_s^2 - \lambda_a^2}.$$

Si ottiene così  $a = 1.405$  e  $b = 2.242 \times 10^4$  nm<sup>2</sup>, e a questo punto è facile calcolare i valori di  $n$  a 400 nm e 750 nm di lunghezza d'onda: essi sono rispettivamente:

$$n_{\text{violetto}} = 1.545 \quad \text{e} \quad n_{\text{rosso}} = 1.445.$$

**Quesito n. 3.**

Usando la legge di Snell si può ora calcolare l'angolo di rifrazione per luce violetta e per quella rossa:  $\sin r = (1/n) \sin i$ , e quindi la distanza  $s$  del punto in cui ciascuna componente di lunghezza d'onda emerge dalla lastra dopo averla attraversata, rispetto al punto che si trova di fronte al punto di incidenza:

$$s = t \tan r = t \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

e quindi, rispettivamente,

$$s_{\text{violetto}} = 5.71 \text{ cm} \quad \text{e} \quad s_{\text{rosso}} = 6.25 \text{ cm},$$

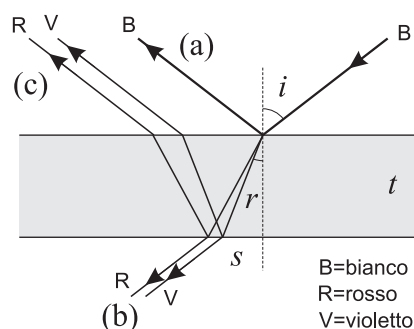
per cui la distanza  $\Delta s$  fra i punti centrali in cui emergono dalla lastra la componente rossa e quella violetta della luce bianca risulta 5.4 mm.

L'angolo con cui la luce emerge è ancora  $i$ , per cui a questo allargamento dovuto alla dispersione si deve aggiungere l'asse maggiore dell'ellisse con cui emerge comunque il fascio di diametro  $d = 1$  mm anche in assenza della dispersione, cioè  $d/\cos i = 1.56$  mm.

La larghezza complessiva è quindi circa 7.0 mm.

**Quesito n. 4.**

In ogni caso l'occhio riceve un fascio di raggi paralleli, quindi vede un punto all'infinito.



**Quesito n. 5.**

(a) La luce riflessa alla prima superficie non subisce dispersione e quindi appare bianca come quella incidente; il fascio ha ancora un diametro di 1 mm, quindi il diametro della pupilla è irrilevante.

(b) Il fascio di luce trasmesso dalla lastra si può considerare la sovrapposizione di tanti fasci, a lunghezze d'onda diverse, spostati uno rispetto all'altro di quantità che al massimo, tra il rosso e il violetto, vale  $\Delta s \cos i$ . La dimensione maggiore complessiva è allora  $\Delta s \cos i + d = 4.5$  mm, e il fascio entra completamente nella pupilla quando essa è larga 6 mm; ricombinandosi tutti i colori, la luce appare bianca. Quando invece la pupilla è larga 2 mm entra solo la porzione centrale del fascio, dove per effetto della dispersione sono assenti le componenti rossa e violetta, quindi la luce appare verdastra.

(c) La luce riflessa alla seconda superficie viene ulteriormente dispersa nel vetro tornando indietro, quindi la separazione spaziale tra la luce rossa e quella violetta raddoppia e la dimensione maggiore del fascio diventa  $2\Delta s \cos i + d = 8.0$  mm. Allora anche con la pupilla larga una parte del fascio non entra nell'occhio e la luce appare verdastra; quando la pupilla è stretta si vedono principalmente le componenti luminose di lunghezza d'onda al centro dello spettro visibile intorno a  $550 \div 600$  nm, quindi il colore verde-giallo appare in modo più netto.

## PROBLEMA n. 3 – Il volo della pallina

**Quesito n. 1.**

Rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il carrello (SC), e quindi non inerziale, dopo il rilascio della pallina questa è soggetta, oltre che al peso  $\vec{P}$ , ad una forza fittizia – detta *forza di trascinamento*, che indicheremo con  $\vec{F}_t$  – costante, diretta verso sinistra in fig. 1 e di modulo  $ma'$ . In conseguenza di ciò il moto della pallina sarà rettilineo e uniformemente accelerato. La direzione del moto coinciderà con la direzione della risultante  $\vec{P} + \vec{F}_t$ .

Dalla similitudine tra il triangolo delle forze e il triangolo rettangolo che ha come ipotenusa la traiettoria abbiamo:

$$\frac{x_0}{h_0} = \frac{F_t}{P} = \frac{a'}{g} \quad \text{da cui} \quad a' = g \frac{x_0}{h_0} \quad \text{e dunque:} \quad a' = 3.92 \text{ m s}^{-2}.$$

Dato che la forza  $\vec{F}$  applicata è costante, l'accelerazione prima della caduta della pallina era:

$$a = \frac{M}{M + m} a' = 3.27 \text{ m s}^{-2}$$

**Quesito n. 2.**

Nell'istante  $t_1$  in cui inizia l'impatto (scegliamo come origine dei tempi l'istante di rilascio della pallina), la componente orizzontale della velocità della pallina è ancora  $v_0$ . Occorre conoscere la velocità del carrello nel sistema del laboratorio (SL): per ricavarla, si deve calcolare il tempo di volo  $t_1$ . Sia nel SC che nel SL la componente verticale del moto della pallina è una caduta libera con partenza da fermo e accelerazione  $g$ .

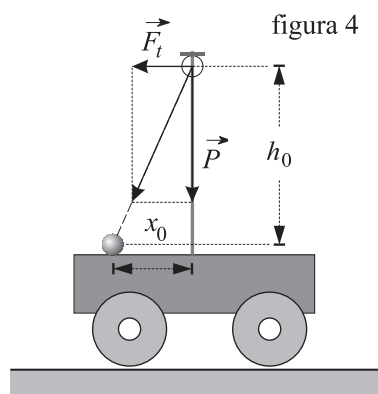
Segue:  $t_1 = \sqrt{2h_0/g}$ .

Dunque, la velocità del carrello nel SL nell'istante  $t_1$ , che indicheremo con  $v_{c,1}$  vale:

$$v_{c,1} = v_0 + a' t_1 = v_0 + x_0 \sqrt{\frac{2g}{h_0}} = 2.39 \text{ m s}^{-1}.$$

Consideriamo il sistema costituito dalla biglia e dal carrello: l'unica forza esterna applicata in direzione orizzontale è la forza  $F$ . Appliciamo il teorema dell'impulso alla componente orizzontale della quantità di moto del sistema, relativamente alla durata dell'urto  $\Delta t$ :

$$F \Delta t = (M + m)v' - (mv_0 + Mv_{c,1})$$



dove  $v'$  indica la velocità comune della pallina e del carrello al termine dell'urto. La velocità  $v'$  risulta allora:

$$v' = \frac{Ma' \Delta t + mv_0 + Mv_{c,1}}{M+m} = v_0 + \frac{Mg(x_0/h_0)(t_1 + \Delta t)}{M+m} = 2.25 \text{ m s}^{-1} \quad \text{essendo} \quad t_1 = 0.226 \text{ s}.$$

#### Soluzione alternativa

L'idea che, nella direzione del moto, al sistema sia applicata un'unica forza esterna ( $\vec{F}$ ) suggerisce una soluzione più immediata, prendendo in considerazione il moto accelerato del Centro di Massa (CdM) con accelerazione, la cui componente orizzontale è  $a = F/(M+m)$ .

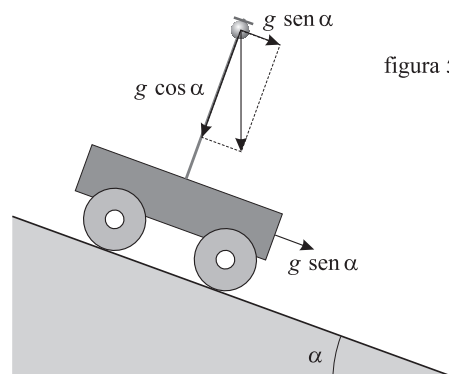
Quando il carrello e la pallina si muovono insieme, cioè prima dello sganciamento della pallina e subito dopo l'urto, la velocità del sistema coincide con quella del CdM; ne segue che la velocità del carrello al termine dell'urto è semplicemente

$$v' = v_0 + a(t_1 + \Delta t) = v_0 + \frac{M}{M+m} g \frac{x_0}{h_0} (t_1 + \Delta t) \quad \text{come sopra.}$$

#### Quesito n. 3.

Se analizziamo il moto nel SL, vediamo che, nella direzione del piano inclinato, carrello e pallina hanno la stessa accelerazione:  $g \sin \alpha$ . Entrambi i corpi partono dalla quiete, pertanto, in ogni istante, saranno animati dalla stessa velocità e compiranno uguali spostamenti in direzione parallela al piano inclinato.

Di conseguenza, nel SC, si vedrà la pallina cadere in direzione parallela all'asta e arrestarsi alla base di questa: si avrà una "caduta libera" con accelerazione  $g \cos \alpha$ .



#### Quesito n. 4.

Per quanto detto sopra, al momento dell'impatto, carrello e pallina avranno la stessa velocità in direzione parallela al piano inclinato e questa non sarà alterata dall'urto.

Per calcolarla occorre stabilire la durata del volo della pallina, che dipende dall'angolo  $\alpha$ ; questo si determina imponendo che la componente parallela al piano della forza di gravità sia uguale alla forza esterna del caso precedente. Si trova

$$(M+m)g \sin \alpha = F = Ma' = M \frac{x_0}{h_0} g \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{M x_0}{(M+m) h_0} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(l'angolo  $\alpha$  è di  $19.5^\circ$ .)

Conviene adesso esaminare la situazione nel SC. In questo riferimento si può calcolare facilmente il tempo di volo:

$$t'_{\text{volo}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g \cos \alpha}} = 0.233 \text{ s}$$

per cui, al termine dell'impatto, la velocità del carrello nella direzione del piano inclinato sarà:

$$v'_c = g \sin \alpha (t'_{\text{volo}} + \Delta t) = 0.777 \text{ m s}^{-1}$$

Questo problema è stato elaborato su un'idea originale di Andrea Stefanini (Livorno) che si ringrazia per la collaborazione.

## PROBLEMA n. 4 – Atomo di Litio... alla Thomson

**Quesito n. 1.**

Una mole di litio contiene un numero di Avogadro di atomi di litio e ciascuno di essi occupa un volume medio  $V = M/(\rho N_A)$ . Una stima del diametro atomico è

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}} = 2.79 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Il raggio atomico è dunque  $R = 1.40 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Si tratta di una stima in cui gli atomi sono a contatto con 6 altri atomi adiacenti (cristallo a reticolo cubico).

**Quesito n. 2.**

Data la simmetria sferica della distribuzione di carica, il campo elettrico in ogni punto dello spazio ha direzione radiale, e modulo che è funzione solo della distanza  $r$  dal centro. Trattandosi di carica positiva il verso risulterà uscente. La componente radiale del campo  $E(r)$  si può determinare applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica concentrica con la distribuzione stessa.

Per determinare il campo elettrico nei punti esterni alla distribuzione di carica si considera una superficie sferica concentrica alla distribuzione di raggio  $r \geq R$  e si trova

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e}{r^2}.$$

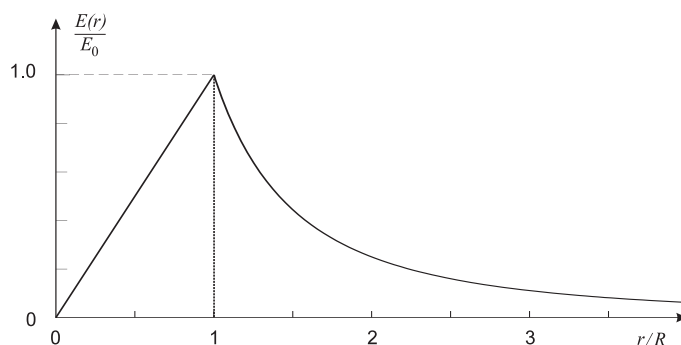
Scegliendo, invece, una superficie sferica di raggio  $r < R$  concentrica alla distribuzione, si ha che il flusso del campo elettrico attraverso la superficie sferica orientata è  $\Phi = 4\pi r^2 E(r)$  e la carica elettrica racchiusa nella superficie è  $Q_{\text{int}} = 3e r^3/R^3$ . Da qui si ricava

$$E(r) = \frac{3e}{4\pi\epsilon_0} r.$$

Tenendo conto dei dati, e ponendo  $E_0 = E(R) = 3e/(4\pi\epsilon_0 R^2)$  il campo elettrico della distribuzione sferica di carica si può scrivere come

$$E(r) = \begin{cases} E_0 \frac{r}{R} & \frac{r}{R} \leq 1 \\ E_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 & \frac{r}{R} \geq 1 \end{cases} \quad \text{dove} \quad E_0 = 2.22 \times 10^{11} \text{ V/m}.$$

Nella figura a fianco è riportato il grafico di  $E(r)/E_0$  in funzione di  $r/R$ .



Ponendo a zero il potenziale a distanza infinita dalla distribuzione di carica, l'andamento nei punti esterni ( $r \geq R$ ) è dato da

$$V(r) = \frac{3e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

poiché l'andamento del campo, nei punti esterni alla distribuzione sferica, è come quello di una carica puntiforme.

Ponendo, analogamente a sopra,  $V_0 = V(R) = 3e/(4\pi\epsilon_0 R)$ , per i punti esterni si scriverà  $V(r) = V_0(R/r)$ , mentre per determinare il potenziale nei punti interni alla distribuzione di carica, in base alla definizione di potenziale si ha

$$V(r) = V(R) - \int_R^r E \, dr = V_0 - \int_R^r E_0 \frac{r}{R} \, dr = V_0 - \frac{E_0}{R} \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_R^r$$

e, dal momento che, per questa distribuzione di carica, vale la relazione  $E_0 = V_0/R$ , si trova

$$V(r) = \frac{3}{2}V_0 - \frac{1}{2}\frac{V_0}{R^2}r^2.$$

Riepilogando, il potenziale della distribuzione di carica è

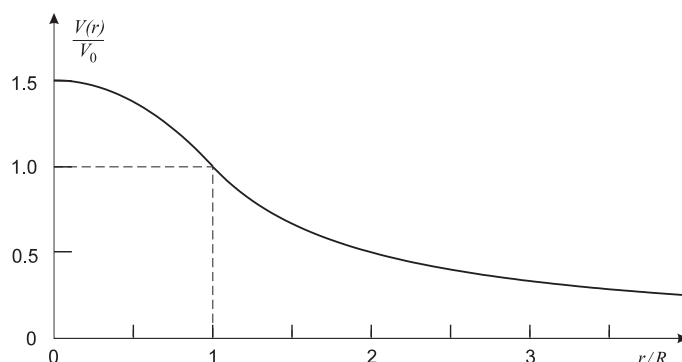
$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}V_0 \left[ 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] & \frac{r}{R} \leq 1 \\ V_0 \frac{R}{r} & \frac{r}{R} \geq 1 \end{cases} \quad \text{con } V_0 = 31.0 \, \text{V}.$$

Il potenziale elettrostatico si può determinare anche per integrazione grafica calcolando l'area tra il grafico del campo elettrico e l'asse delle ascisse, fra i punti a distanza  $r$  e infinito dal centro della distribuzione di carica. Il valore dell'area tra  $R$  e infinito è pari al potenziale sulla superficie della distribuzione sferica, ovvero  $V(R) = V_0$ , mentre il valore dell'area compresa tra i punti distanti  $r$  ed  $R$  dal centro è l'area di un trapezio di basi  $E(R)$  ed  $E(r)$  e altezza  $R - r$  per cui

$$V(r) = V_0 + \frac{1}{2} \left( E_0 \frac{r}{R} + E_0 \right) (R - r).$$

Sviluppando il calcolo e ponendo  $V_0 = E_0 R$ , si ottiene il medesimo risultato.

Il grafico di  $V(r)/V_0$  in funzione di  $r/R$  è riportato a fianco.



### Quesito n. 3.

Le due configurazioni d'equilibrio possibili hanno: la prima un elettrone al centro della distribuzione sferica e due elettroni a distanza  $X$  dal centro, l'altra i tre elettroni ai vertici di un triangolo equilatero ciascuno a distanza  $Y$  dal centro della distribuzione. Per determinare i valori di  $X$  e  $Y$  devono essere uguali e opposti i campi elettrici sugli elettroni dovuti alla carica positiva e alle cariche negative degli altri elettroni. Un ragionamento simile si applica all'atomo di litio ionizzato una volta: i due elettroni dello ione si sistemano in posizione simmetrica rispetto al centro della distribuzione alla distanza  $Y'$ .

– *Configurazione con un elettrone al centro della distribuzione*

Il campo elettrico sull'elettrone al centro della distribuzione è equilibrato se i due elettroni sono entrambi a distanza  $X$  dal centro. Sull'elettrone centrale il campo della carica positiva è nullo.

Il campo elettrico su uno degli altri elettroni dovuto alla presenza degli altri due è diretto verso l'interno della distribuzione, secondo una direzione radiale e il modulo è

$$E_-(X) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 X^2} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (2X)^2} = \frac{5}{4} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 X^2} = \frac{5}{12} E_0 \left( \frac{R}{X} \right)^2$$

Il campo elettrico dovuto alla carica positiva secondo la relazione calcolata prima è

$$E_+(X) = \frac{3e}{4\pi\epsilon_0} \frac{X}{R^3} = E_0 \left( \frac{X}{R} \right)$$

diretto anch'esso radialmente, tuttavia verso l'esterno della distribuzione. In condizioni di equilibrio,  $E_+(X) = E_-(X)$  e, da qui, si ricava

$$X = \sqrt[3]{\frac{5}{12}} R = 1.04 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

- *Configurazione con gli elettroni equidistanti dal centro*

Anche in questo caso, il campo elettrico generato da due elettroni nella posizione dove si trova il terzo è diretto radialmente verso l'interno della distribuzione di carica, mentre il campo generato dalla distribuzione positiva è radiale diretto verso l'esterno. In questo caso si ha

$$E_-(Y) = 2 \frac{e \cos(30^\circ)}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{3} Y)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 Y^2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} E_0 \left( \frac{R}{Y} \right)^2 \quad \text{ed} \quad E_+(Y) = \frac{3e}{4\pi\epsilon_0} \frac{Y}{R^3} = E_0 \left( \frac{Y}{R} \right).$$

In situazione di equilibrio si ha

$$Y = \frac{R}{\sqrt{3}} = 0.806 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

- *Configurazione per lo ione  $\text{Li}^+$*

Gli elettroni si dispongono a distanza  $Y'$  dal centro. In questa configurazione si ha, su ciascun elettrone,

$$E_-(Y') = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (2Y')^2} = \frac{1}{12} E_0 \left( \frac{R}{Y'} \right)^2 \quad \text{ed} \quad E_+(Y') = \frac{3e}{4\pi\epsilon_0} \frac{Y'}{R^3} = E_0 \left( \frac{Y'}{R} \right).$$

In situazione di equilibrio si ha

$$Y' = \frac{R}{\sqrt[3]{12}} = 0.610 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

#### **Quesito n. 4.**

L'energia richiesta è l'energia di legame cioè l'energia che si deve fornire ad un elettrone per estrarlo dall'atomo e portarlo a distanza infinita.

L'energia dell'atomo di litio è data dalla somma dell'energia necessaria per costruire la distribuzione di carica positiva,  $U_0$ , e l'energia della distribuzione degli elettroni. Nella configurazione con gli elettroni equidistanti,  $Y = R/\sqrt{3}$  e l'energia è

$$U(Y) = U_0 - 3e V(Y) + 3 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} Y} = U_0 - 3 \frac{3}{2} \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + 3 \frac{1}{2} \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} Y^2 + 3 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3} Y}.$$

Elaborando questa relazione e sostituendo  $Y$ , si trova

$$U(Y) = U_0 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ -\frac{27}{2} + \frac{9}{2} \frac{Y^2}{R^2} + \sqrt{3} \frac{R}{Y} \right] = U_0 - 9 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

L'energia dell'atomo ionizzato si trova ragionando allo stesso modo sulla configurazione con due elettroni a distanza  $Y' = R/\sqrt[3]{12}$  dal centro.

$$U(Y') = U_0 - 2e V(Y') + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (2Y')} = U_0 - 2 \frac{3}{2} \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + 2 \frac{1}{2} \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} Y'^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 Y'}.$$

Elaborando e sostituendo  $Y'$ , si trova

$$U(Y') = U_0 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ -9 + 3 \frac{Y'^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{R}{Y'} \right] = U_0 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ -9 + \frac{3}{2\sqrt[3]{18}} + \frac{\sqrt[3]{12}}{2} \right].$$

L'energia di legame è

$$\Delta U = U(Y') - U(Y) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ \frac{3}{2\sqrt[3]{18}} + \frac{\sqrt[3]{12}}{2} \right] = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{9}{2\sqrt[3]{18}} = 2.84 \times 10^{-18} \text{ J} = 17.7 \text{ eV}.$$

I valori dell'energia di legame ottenuti sono dello stesso ordine di grandezza di quelli ottenuti da misurazioni chimiche. Per esempio, l'energia di ionizzazione del litio è 5.39 eV, rispetto ai 17.7 eV trovati sopra.

Versione alternativa in termini di  $E_0$  e  $V_0$ .

In ogni configurazione l'energia del sistema è data dalla somma di tre termini:

$U_0$  energia di configurazione della carica positiva;

$U_n = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$  energia di configurazione degli  $n$  elettroni (dove  $q_i = -e$  e  $V_i$  è il potenziale dovuto agli altri elettroni presenti);

$U_{\text{int}} = \sum (-e)V(r)$  energia di interazione tra gli elettroni (a distanza  $r$  dal centro) e la carica positiva.

Nel caso dell'atomo neutro con i tre elettroni ai vertici di un triangolo equilatero il cui lato è  $R$  (essendo  $Y = R/\sqrt{3}$  la distanza di ciascuno dal centro) si ha

$$U_3 = 3 \frac{1}{2} e \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 R} = eV_0$$

$$U_{\text{int}} = -3eV(Y) = -\frac{3}{2}eV_0 \left[ 3 - \left( \frac{R/\sqrt{3}}{R} \right)^2 \right] = -4eV_0 \quad \text{da cui} \quad U_{(\text{Li})} = U_0 - 3eV_0$$

Nel caso dell'atomo ionizzato una volta, con i due elettroni distanti  $2Y' = 2R/\sqrt[3]{12}$  invece si ha

$$U_2 = 2 \frac{1}{2} e \frac{e}{4\pi\epsilon_0 2Y'} = eV_0 \frac{R}{6Y'} = \frac{\sqrt[3]{12}}{6} eV_0$$

$$U_{\text{int}} = -2eV(Y') = -eV_0 \left[ 3 - \left( \frac{R/\sqrt[3]{12}}{R} \right)^2 \right] = - \left[ 3 - \frac{1}{(\sqrt[3]{12})^2} \right] eV_0 \quad \text{da cui}$$

$$U_{(\text{Li}^+)} = U_0 + \left[ -3 + \frac{1}{(\sqrt[3]{12})^2} + \frac{\sqrt[3]{12}}{6} \right] eV_0 = U_0 + \left[ -3 + \frac{3}{2\sqrt[3]{18}} \right] eV_0$$

$$\text{E infine} \quad \Delta U = U_{(\text{Li}^+)} - U_{(\text{Li})} = \frac{3}{2\sqrt[3]{18}} eV_0 = 17.7 \text{ eV} = 2.84 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Il modello atomico di Thomson consente di fare previsioni sulle lunghezze d'onda emesse da un atomo eccitato. Infatti, analizzando le vibrazioni elastiche degli elettroni attorno alle posizioni di equilibrio, si possono stimare le frequenze della radiazione emessa. Il calcolo fornisce valori di frequenza diverse a seconda delle configurazioni, ma tutte stanno nella zona dello spettro elettromagnetico del lontano ultravioletto. I valori dello spettro di emissione sono però nettamente diversi dai valori previsti.

Una prova conclusiva dell'inadeguatezza del modello di Thomson è stata ottenuta nel 1911 in seguito agli esperimenti di Rutherford sulla diffusione di particelle alfa da parte degli atomi. Nonostante il modello di Thomson, dunque, spiegasse la presenza degli ioni e degli elettroni e fosse in grado di spiegare alcuni risultati della chimica, fu soppiantato da modelli più predittivi dei fenomeni atomici.

Materiali prodotti dal gruppo

	<p><b>PROGETTO OLIMPIADI</b></p> <p>Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica</p> <p>presso Liceo Scientifico "U. Morin"</p> <p>VENEZIA MESTRE</p> <p>fax: 041.584.1272</p> <p>e-mail: <a href="mailto:olifis@libero.it">olifis@libero.it</a></p>
---	--