Risposte e risultati

Nel caso di un corpo che scorra su un altro, il coefficiente di attrito radente dinamico è il rapporto tra la componente tangenziale e quella normale alle superfici a contatto della reazione vincolare, e dentro certi limiti dipende solo dalla natura delle superfici. Il coefficiente di attrito radente statico o al distacco è il rapporto che c'è tra le due componenti quando inizia il movimento relativo ed è, di solito, maggiore di quello dinamico. La superficie dell'angolato di alluminio anodizzato e quella delle sferette di acciaio si prestano alla misurazione dei coefficienti di attrito statico e dinamico nel senso che le misure risultano abbastanza ripetibili.
Quando le tre sferette assemblate scivolano sulla superficie di alluminio sono soggette ad una forza di attrito radente dinamico. Quando la singola sferetta rotola senza strisciare sulla superficie piana di alluminio è soggetta alla forza di attrito radente statico che le permette appunto di rotolare, e il cui valore massimo è quello che si misura al distacco. Al moto di puro rotolamento si può sovrapporre anche un moto di "slittamento", soggetto all'attrito dinamico, se l'inclinazione del piano supera un certo valore.
L'attrito volvente è trascurabile data la mancanza di asperità e l'indeformabilità delle sferette e del piano di alluminio nelle situazioni prospettate nella prova.

Risposta 1a.
Dopo aver pulito con l'alcol la base delle tre sferette assemblate e la superficie del piano, si aumenta dolcemente l'inclinazione di questo fino a che le tre sferette non iniziano a muoversi, e quindi la si diminuisce appena per farle fermare. La decisione che è stato raggiunto l'inclinazione massima è meno soggettiva di quanto si possa pensare. Negli esempi si è apprezzato il mezzo grado nelle letture al goniometro. Ci si accorge anche quanto sia importante disporre opportunamente l'angolato di alluminio parallelamente al lato corto del tavolo che di solito è un po' inclinato, altrimenti le sferette tendono a muoversi di lato.
È importante controllare che il filo che fa da indice per il goniometro, non si fermi in posizioni false a causa dell'attrito sul goniometro stesso. È bene ripetere la misurazione nello stesso punto e in altri punti sul piano di alluminio, per avere un valore medio significativo. Nell'esempio si è apprezzato il mezzo grado nella lettura degli angoli, come si consiglia nel testo.

Risultati su 147 prove
:

Massima inclinazione per equilibrio θ	6,0°	6,5°	7,0°	7,5°	8,0°	8,5°	9,0°	9,5°
Frequenza percentuale	0,7 %	7,5 %	15 %	22 %	30 %	16 %	5 %	3 %

Risposta 1b.

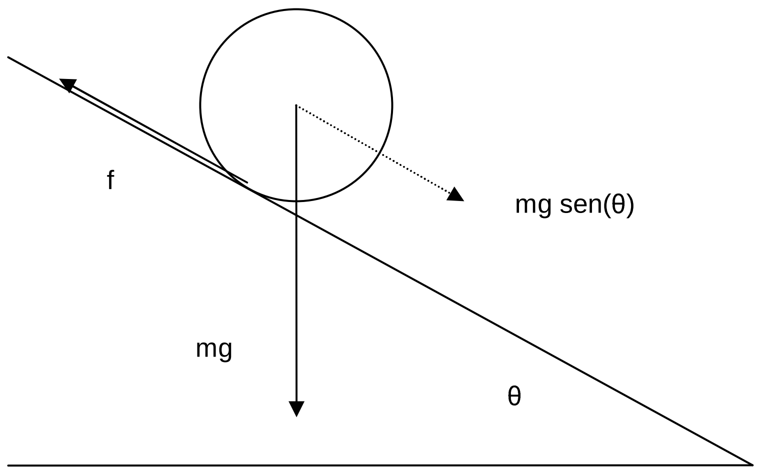
La media aritmetica dei valori della massima inclinazione è θ = 7,8°. Il coefficiente di attrito radente statico (o al distacco) μ_s, calcolato con la $\mu_s = \tan(\theta)$ risulta:

μ_s= 0,14 ± 0,01 (0,01=deviazione standard su 147 prove; incertezza percentuale 7 %);

μ_s= 0,14 ± 0,02 (0,02=semidispersione massima per 7°≤ θ ≤ 9°; incertezza percentuale 14 %)

Risposta 1c.
Per prevedere la massima inclinazione a cui la sferetta singola può rotolare senza slittare sul piano, si applicano le leggi del moto e la $a_{cm} = r \cdot \alpha$. [1]

La componente del peso mg·cos(θ) è equilibrata dalla reazione vincolare normale al piano; entrambe le forze hanno momento nullo rispetto al centro di massa



F_R = Risultante delle forze applicate; m = massa; a_{cm} = accelerazione del centro di massa; α = accelerazione angolare della rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa;
M_R = momento risultante delle forze applicate rispetto al centro di massa; I_{cm} = momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa; r = raggio di una sferetta; μ_s = coefficiente di attrito radente statico

La $F_R = m \cdot a_{cm}$ diventa $m \cdot g \cdot \mathrm{sen}(\theta) - f = m \cdot a_{cm}$, dove f indica la forza di attrito radente statico nel punto di contatto tra sferetta e piano.
La $M_R = I_{cm} \cdot \alpha$ diventa $f \cdot r = 2/5 \cdot m \cdot r^2 \cdot \alpha$ dato che per una sfera: $I_{cm} = 2/5 \cdot m \cdot r^2$

In caso di rotolamento puro su un piano: $a_{cm} = r \cdot \alpha$ e con le opportune sostituzioni si ricava facilmente:
$f = 2/7 mg\ sen(\theta)$.
Dato che la forza d'attrito può valere al massimo $\mu_s mg \cos(\theta)$, risulta $f \leq \mu_s mg \cos(\theta)$, quindi $2/7 mg \mathrm{sen}(\theta) \leq \mu_s mg \cos(\theta)$; da cui $\tan(\theta) \leq 7/2 \mu_s$.

L'inclinazione massima θ_{max} a cui si può avere rotolamento puro è dunque $$\vartheta_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{7}{2}\mu_s\right)$$

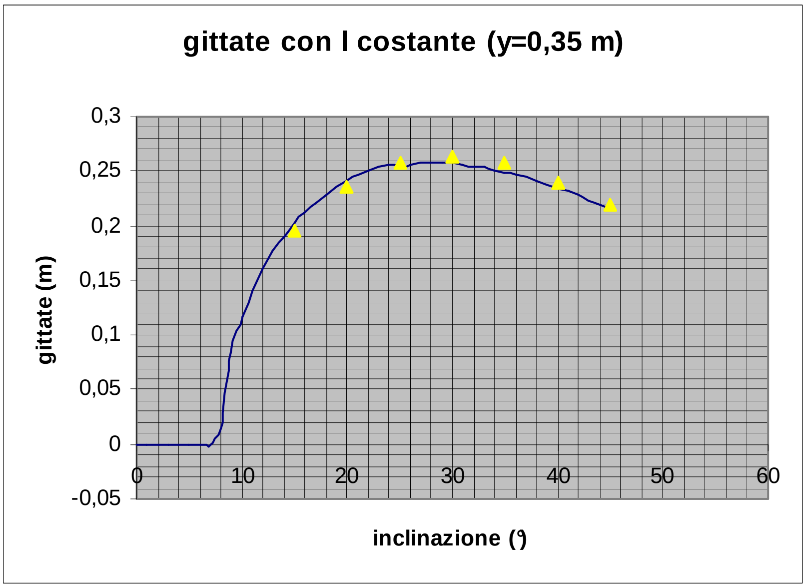
Dai dati sperimentali: $\mu_s = 0,14 \pm 0,01 \rightarrow \theta_{max} = 26 \pm 2°$; $\mu_s = 0,14 \pm 0,02 \rightarrow \theta_{max} = 26 \pm 3°$

Risposta 2a.
L'altezza y della caduta può variare da tavolo a tavolo, a seconda dell'altezza della sedia e del tavolo. Si misura agevolmente con la stecca millimetrata parallela ai fili a piombo, dopo aver posto la scatola sulla sedia e averne controllato l'orizzontalità a occhio o con l'aiuto della squadretta e dei fili a piombo; eventualmente si può fare un aggiustamento con spessori di plastilina, come è suggerito nel testo.
Le misure riportate sono riferite a due valori di altezza di caduta: $y_1 = 0,350 \pm 0,005$ m ; $y_2 = 0,275 \pm 0,005$ m
Ovviamente con altezze maggiori o minori delle due riportate, le gittate saranno maggiori o minori, a parità degli altri parametri l e θ.

Risposta 2b.
Una volta fissata la base del piano inclinato come indicato nel testo, si sposta il sostegno sotto l'angolato fino ad ottenere l'inclinazione voluta. Si sceglie la base di appoggio del sostegno a forma di parallelepipedo, in modo che questo non sia troppo vicino allo spigolo basso dell'angolato, altrimenti questo si sbilancia. Si segna con la matita la linea di partenza delle sferette. Conviene porre su questa linea le due sferette inferiori e considerare poi la traccia lasciata da queste due che toccano per prime il foglio di atterraggio e lasciano una traccia più marcata, per poi misurare la gittata. La gittata sarà data dalla distanza della traccia dal bordo del foglio posto sotto i due fili a piombo. Se si hanno dubbi circa il ribaltamento in aria delle tre sferette, si può porre sulla linea di partenza il loro centro di massa. Per

misurare la gittata conviene comunque considerare la traccia più marcata; l'incertezza di 0,5 cm corrisponde grosso modo sia alla distanza tra il centro di una sferetta e il centro di massa sia alla semidispersione tra i valori delle gittate. Per ogni inclinazione, è bene fare diverse registrazioni sullo stesso foglio, così si evidenzieranno le tracce "anomale": per quasi tutte queste la gittata sembra più corta delle altre perché corrispondono a cadute "oblique" delle sferette. Nella tabella, a fianco delle misure, si riportano i valori delle gittate calcolate con il foglio elettronico, attraverso le formule che sono riportate alla risposta 2c.

	Tre sferette scivolano l = 30,0 cm			
Inclinazione θ (°)	Gittate x (m) misurate y_1= 0,350 m	Gittate x (m) calcolate con μ_d=0,14 y_1= 0,350 m	Gittate x (m) misurate y_1= 0,275 m	Gittate x (m) calcolate con μ_d =0,14 y_1= 0,275 m
10		0,1171		0,1034
13		0,1766		0,1553
15	0,196 ± 0,005	0,2023	0,172 ± 0,005	0,1774
18		0,2293		0,2002
20	0,236 ± 0,005	0,2417	0,210 ± 0,005	0,2104
23		0,2539		0,2199
25	0,257 ± 0,005	0,2551	0,221 ± 0,005	0,2200
28		0,2577	0,224 ± 0,005	0,2209
30	0,264 ± 0,005	0,2571	0,221 ± 0,005	0,2197
33		0,2533	0,215 ± 0,005	0,2154
35	0,258 ± 0,005	0,2493	0,214 ± 0,005	0,2113
38		0,2412		0,2035
40	0,240 ± 0,005	0,2348	0,204 ± 0,005	0,1975
43		0,2239		0,1876
45	0,219 ± 0,005	0,2159	0,187 ± 0,005	0,1805



Le gittate crescono fino ad un valore massimo per poi diminuire.
Il valore massimo è collocabile a circa 30° per y=0,350 m, a circa 28° per y=0,275 m. Il grafico a tratto continuo rappresenta le gittate calcolate con il Foglio Elettronico, con y = 0,350 m.

Risposta 2c.
Al crescere dell'inclinazione, con lunghezza l costante, aumenta l'energia cinetica acquistata sul piano inclinato dalle tre sferette per due motivi: aumenta il dislivello tra inizio e fine del piano inclinato e quindi aumenta il lavoro positivo della forza peso; diminuisce la sua componente normale al piano, e quindi diminuisce la forza di attrito, e così pure il modulo del lavoro negativo di quest'ultima. L'aumento dell'energia cinetica e quindi della velocità all'inizio del volo, farebbe aumentare la gittata.
Però, nello stesso tempo diminuisce la componente orizzontale della velocità all'inizio del volo, mentre aumenta la componente verticale, ed entrambe queste variazioni causerebbero una diminuzione della gittata.
Dai dati si capisce che per inclinazioni minori di 28° o 30° prevalgono i fattori che fanno crescere la gittata, per inclinazioni maggiori, prevalgono quelli che la fanno diminuire.

L’espressione, che non è richiesta, della gittata x in funzione di l e di θ , si può ottenere a partire dalla relazione :
“Lavoro delle forze esterne = variazione di energia cinetica”
che diviene nel caso specifico delle sferette che scivolano sul piano inclinato:

$Mg\, l\, sen(\theta) - \mu_d\, Mg \cos(\theta) = ½\, Mv^2$ dove M indica la massa del sistema sferette-plastilina

Da questa relazione si ricava v che è la velocità raggiunta alla base del piano inclinato, cioè all’inizio del volo

$$v = \sqrt{2gl(sen(\vartheta) - \mu_d \cos(\vartheta)}$$

La gittata vale: $x = v \cos(\theta)\, t$, dove t indica il tempo di volo.

Dall’equazione $y = v\, sen(\theta)\, t + ½\, g\, t^2$ si ricava t.

$$t = \frac{1}{g}\left[-vsen(\vartheta) + \sqrt{v^2 sen^2(\vartheta) + 2gy}\right]$$

e la gittata è espressa dalla $$x = v\cos(\vartheta)\frac{1}{g}\left[-vsen(\vartheta) + \sqrt{v^2 sen^2(\vartheta) + 2gy}\right]$$

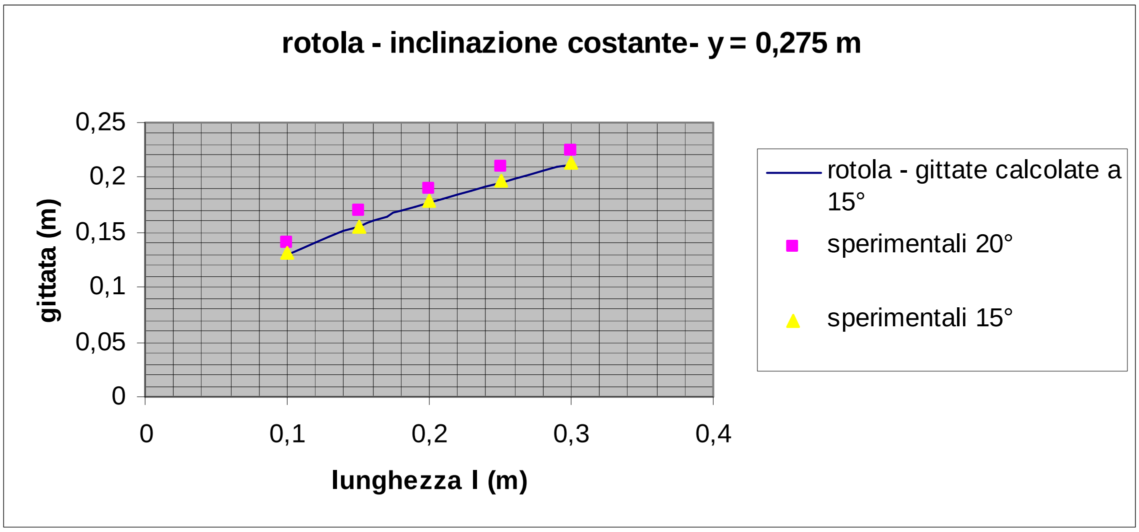
Sostituendo a v la sua espressione in funzione di l e di θ, si ottiene per la gittata x l’espressione in funzione della variabile θ , e dei parametri l e y, ma la formula risulta davvero molto complessa.
Uno studio della funzione $x = x(\theta)$ è pressoché impossibile con gli strumenti e il tempo a disposizione durante la prova e non è richiesto. (V. anche [2])

Risposta 3a.
Per il rotolamento puro bisogna dare al piano un’inclinazione minore o uguale a quella determinata al punto 1 c, e, viste le domande seguenti, superiore a quella minima a cui le sferette iniziano a scivolare. Se non si è risposto alla domanda 1c, il buon senso indica di non scostarsi troppo dai 15°. Per le misure di riferimento si sono scelte le inclinazioni di 15° e di 20° entrambe minori di 26° che è l’inclinazione massima calcolata per il rotolamento puro.

Risposta 3b.
Le gittate “misurate” riportate nella tabella sono state ricavate ciascuna da una diecina di valori. Quella “calcolate” sono state ottenute col Foglio Elettronico per mezzo della formula per la gittata della pag. precedente, dove però a v si è sostituita l’espressione $v = \sqrt{\frac{10}{7} gl \cdot sen(\vartheta)}$ ricavata dalla conservazione dell’energia meccanica della sferetta che rotola. (Vedi alla pagina seguente “moto di rotolamento” e formule relative)

	Una sferetta rotola - Inclinazione θ = 15°			
Lunghezza l (cm)	Gittate x (m) misurate y_1= 0,350 m	Gittate x (m) calcolate y_1= 0,350 m	Gittate x (m) misurate y_1= 0,275 m	Gittate x (m) calcolate y_1= 0,275 m
10	0,150 ± 0,003	0,1464	0,131 ± 0,003	0,1288
13		0,1656		0,1455
15	0,176 ± 0,003	0,1770	0,156 ± 0,003	0,1554
18	0,189 ± 0,003	0,1925		0,1689
20	0,200 ± 0,003	0,2021	0,178 ± 0,003	0,1771
23		0,2154		0,1887
25	0,232 ± 0,003	0,2237	0,197 ± 0,003	0,1959
28		0,2354		0,2061
30	0,248 ± 0,003	0,2428	0,214 ± 0,003	0,2125

	Una sferetta rotola - Inclinazione θ = 20°			
Lunghezza l (cm)	Gittate x (m) misurate y_1= 0,350 m	Gittate x (m) calcolate y_1= 0,350 m	Gittate x (m) misurate y_1= 0,275 m	Gittate x (m) calcolate y_1= 0,275 m
10	0,154 ± 0,003	0,1588	0,141 ± 0,003	0,1391
13		0,1788		0,1564
15	0,189 ± 0,003	0,1906	0,169 ± 0,003	0,1666
18		0,2066		0,1803
20	0,204 ± 0,003	0,2164	0,190 ± 0,003	0,1887
23		0,2299		0,2003
25	0,235 ± 0,003	0,2383	0,210 ± 0,003	0,2075
28		0,2501		0,2175
30	0,247 ± 0,003	0,2576	0,225 ± 0,003	0,2238



Il valore di l' per cui la gittata della sferetta singola che rotola è uguale a quella delle tre sferette che scivolano con la stessa inclinazione, si trova confrontando i dati relativi al rotolamento con quelli relativi allo scivolamento, ed eventualmente interpolando.

(y_1= 0,350 m) (θ = 15°) l' = 19,1 cm ; (θ = 20°) l' = 25,4 cm

(y_2= 0,275 m) (θ = 15°) l' = 18,6 cm (θ = 20°) l' = 25,0 cm

Risposta 3 c
Si parte dalla considerazione suggerita nel testo, che per avere la stessa gittata con la stessa inclinazione del piano, la singola sferetta o il sistema delle tre unite devono avere la stessa velocità all'inizio del volo.
Le espressioni delle velocità sono molto più semplici di quelle delle gittate e uguagliando le espressioni delle velocità si ottiene un'equazione nell'incognita μ_d facilmente risolvibile, mentre appare problematico ricavare μ_d uguagliando quelle delle gittate.

Moto di scivolamento:
Dalla relazione (v. risposta 2c): $Mg\, l\, sen(\theta) - \mu_d Mg \cos(\theta) = ½ Mv^2$ dove M indica la massa del sistema sferette-plastilina e μ_d il coefficiente di attrito dinamico, si ricava la velocità raggiunta alla base del piano inclinato delle sferette che scivolano

$$v = \sqrt{2gl(sen(\vartheta) - \mu_d \cos(\vartheta))}$$

Moto di rotolamento:
Nel caso di rotolamento puro su un piano, la velocità di traslazione v del centro di massa e la velocità angolare di rotazione ω attorno ad esso sono legate dalla $v = r\,\omega$. Il lavoro dell'attrito radente (statico) che agisce sul punto di contatto tra sferetta e piano inclinato è nullo in quanto non provoca spostamento.

Dalla $mg\, l\, sen(\theta) = ½mv^2 + ½\, 2/5 mr^2 \omega^2$ che diventa $mg\, l\, sen(\theta) = ½mv^2 + ½\, 2/5mv^2$

Da cui $mg\, l\, sen(\theta) = ½\, 7/5mv^2$

si ricava $v = \sqrt{\frac{10}{7} gl \cdot sen(\vartheta)}$

Sostituendo a l il valore l' della lunghezza di rotolamento che corrisponde alla stessa gittata e alla stessa inclinazione del moto di scivolamento, e uguagliando le due espressioni della velocità si ottiene un'equazione, da cui si ricava il coefficiente di attrito dinamico μ_d.

$$\sqrt{2gl(sen(\vartheta) - \mu_d \cos(\vartheta))} = \sqrt{\frac{10}{7} gl' \cdot sen(\vartheta)}$$

$$\mu_d = \tan(\vartheta) \cdot (1 - 5/7 \frac{l'}{l})$$

Tabella risultati

Altezza y (m)	Inclinazione θ (°)	Lunghezza l' $_{rot}$ (cm)	Lunghezza l $_{sciv}$ (cm)	μ_d
0,350	15,0±0,5	19,1±0,3	30,0±0,2	0,15±0,01
	20,0±0,5	25,4±0,3		0,14±0,01
0,275	15,0±0,5	18,6±0,3		0,15±0,01
	20,0±0,5	25,0±0,3		0,15±0,01
0,339	15,0	21,8±0,3	30,0±0,2	0,13±0,01
	20,0	28,5±0,3		0,12±0,01
0,325	18,0	23,8±1,7		0,14±0,03

Nella tabella con i risultati, l'incertezza 0,01 per μ_d è stata calcolata dalla semidifferenza tra valore massimo e minimo.
Esempio di calcolo con i dati della prima riga:

$\mu_{d\,max}$= tan(15,5°) (1-5/7 · 18,8/30,2) = 0,154 ; $\mu_{d\,min}$ = tan(14,5°) (1- 5/7 · 19,4/29,8) = 0,138

L'incertezza 0,03 per μ_d nell'ultima riga deriva dalla maggior incertezza di l', valutata tenendo conto dell' incertezza della gittata del blocco delle tre biglie unite.
In conclusione i sei risultati portano a ritenere μ_d = 0,14 ± 0,02.

Il coefficiente di attrito radente dinamico μ_d è di solito inferiore a quello statico μ_s. In questo caso non sono apprezzabili differenze significative tra i due coefficienti.

Si può avere una conferma di ciò nel modo seguente: si trova l'inclinazione a cui le tre sferette assemblate si muovono senza accelerare né ritardare almeno per una diecina di centimetri dopo aver ricevuto, da ferme, una piccola spinta. Le inclinazioni così valutate, un po' a occhio, risultano in questo caso le stesse di quelle relative alla misurazione di μ_s (v. 1a).

[1] P. S. Carvalho, A. Sampaio e Sousa, An inexpensive technique to measure coefficients of friction with rolling solids, The Physics Teacher, vol. 43, Nov. 2005, pag. 548

[2] W.H. van den Berg, A. R. Burbank, Sliding off a roof. How does the landing point depend on the steepness? The Physics Teacher, vol.40, Feb. 2002, pag. 84

QUADRO RIASSUNTIVO

1	a	Massima inclinazione per equilibrio: (i numeri tra parentesi indicano le frequenze) I valori sono compresi tra 6,5° e 8,5° con frequenza 91% su 147 prove.
	b	Coefficiente di attrito radente statico: μ_s= 0,14 ± 0,01 (deviazione standard); μ_s= 0,14 ± 0,02 (semidispersione massima)
	c	Massima inclinazione per rotolamento puro: $\theta_{max} = \tan^{-1}(7/2\ \mu)$ μ_s= 0,14 ± 0,01 → θ_{max} =26±2° ; μ_s= 0,14 ± 0,02 → θ_{max}=26±3°
2	a	Altezza di caduta (esempi): y_1= 0,350±0,005 m ; y_2= 0,275±0,005 m
	b	Scivolamento con lunghezza l = 30,0±0,2 cm Inclinazione θ (±0,5°) 10,0 15,0 20,0 25,0 30,0 35,0 40,0 45,0 (y_1= 0,350 m) Gittate x ± 0,5 cm 11,1 19,6 23,6 25,7 26,4 25,8 24,0 21,9 (y_1= 0,275 m) Gittate x ± 0,5 cm -- 17,2 21,0 22,1 22,1 21,4 20,4 18,7 Le misure mostrano che la gittata cresce fino a un valore massimo, poi diminuisce.
	c	Al crescere dell'inclinazione cresce l'energia cinetica acquistata sul piano inclinato dalle tre sferette, perché aumenta il lavoro positivo della forza peso, e, diminuendo la forza di attrito, diminuisce il modulo del suo lavoro negativo; nello stesso tempo diminuisce il rapporto tra la componente orizzontale e quella verticale della velocità all'inizio del volo. I dati fanno vedere che all'inizio prevale l'influenza dei primi fattori che fanno crescere il modulo della velocità, poi prevale quella degli altri.
3	a	Inclinazione scelta: θ = 15° (15°< 26° e quindi c'è puro rotolamento) θ = 20° (20°< 26° e quindi c'è puro rotolamento)
	b	Inclinazione θ = 15,0±0,5° Lunghezze (± 0,2 cm) 10,0 15,0 20,0 25,0 30,0 (y_1= 0,350 m) Gittate x ± 0,3 (cm) 15,0 17,6 20,0 23,2 24,8 (y_2= 0,275 m) Gittate x ± 0,3 (cm) 13,1 15,6 17,8 19,7 21,4 Inclinazione θ = 20,0±0,5° Lunghezze (± 0,2cm) 10,0 15,0 20,0 25,0 30,0 (y_1= 0,315 m) Gittate x (± 0,3 cm) 15,4 18,9 20,4 23,5 24,7 (y_2= 0,263 m) Gittate x (± 0,3 cm) 14,8 16,6 19,0 21,1 22,7 (y_1= 0,350 m) (θ = 15°) l' = 19,1 cm ; (θ = 20°) l' = 25,4 cm (y_2= 0,275 m) (θ = 15°) l' = 18,6 cm (θ = 20°) l' = 25,0 cm
	c	μ_d= 0,14 ± 0,02 formula per ricavare $\mu_d = \tan(\theta)\,[1-5/7\,(l'_{rotolamento}/l_{scivolamento})]$