OLIMPIADI DI FISICA 2002

19 Aprile 2002

SOLUZIONI della Gara Nazionale (Prova Teorica)

PROBLEMA n. 1 — Tensione del filo di un pendolo

50 Punti

Quesito n. 1 – Interpretazione del grafico.

La figura presenta un andamento oscillante della forza: al primo massimo vale $F_1 = 1.6\,\mathrm{N}$, Al primo minimo $F_2 = 0.1\,\mathrm{N}$. Il fatto che i massimi successivi vadano riducendosi lievemente mentre i minimi lievemente aumentano è legato allo smorzamento del pendolo e verrà ignorato.

Quando il pendolo è alla massima deviazione dalla verticale la sua velocità è nulla; la tensione del filo è pari a $mg\,\cos\alpha$, e la componente verticale della tensione è

$$T = mg\cos^2\alpha\,. \tag{1}$$

Questo è il valore minimo della tensione del filo. Il valore massimo della tensione T' si ha quando il pendolo passa per la verticale:

$$T' = mg + \frac{mv^2}{\ell} \tag{2}$$

dove v è la velocità del pendolo.

Poiché nel passaggio per la verticale il pendolo ha la massima velocità, i massimi nel grafico della forza misurata (in funzione del tempo) sono più stretti dei minimi.

Quesito n. 2 – Stima del periodo.

L'intervallo di tempo tra due minimi consecutivi corrisponde a una semioscillazione del pendolo poiché il sensore di forza non distingue tra le due posizioni estreme dell'oscillazione.

Il periodo del pendolo, ovvero il tempo di un'oscillazione completa, è quindi il doppio di tale intervallo; dal grafico si può stimare un valore tra 2.0 e 2.1 s .

Quesito n. 3 – Calcolo della massa e dell'ampiezza.

Nel passaggio dalla massima deviazione alla verticale la massa m si è abbassata di un tratto $h = \ell(1-\cos\alpha)$. Per la conservazione dell'energia meccanica, essendo ancora v la velocità massima al passaggio per la verticale,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg\ell(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{\ell} = 2mg(1-\cos\alpha)$$

che, sostituita nella (2), dà $T' = mg(3-2\cos\alpha)$. Si ha allora

$$\frac{T'}{T} = \frac{3-2\cos\alpha}{\cos^2\alpha} \quad \text{con} \quad \frac{T'}{T} \approx 16 \quad \Rightarrow \quad 16\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 3 = 0$$

da cui si trovano per α i valori approssimati di 68° e 120° dei quali solamente il primo è fisicamente accettabile per il sistema in esame. Il corrispondente valore della massa è

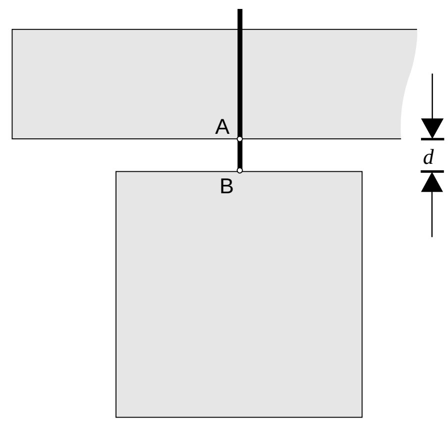
$$m = \frac{T'}{(3-2\cos\alpha)\,g} = 73\,\mathrm{g}\,.$$

PROBLEMA n. 2 — Interferenza

50 Punti

Quesito n. 1 – Condizione d'interferenza e rapporto tra le lunghezze d'onda.

In riferimento alla figura, la luce che si riflette in A non subisce sfasamenti poiché $n_{\text{vetro}} > n_{\text{aria}}$. La luce che si riflette in B subisce uno sfasamento di $\lambda/2$. La differenza di cammino ottico per incidenza normale è $2nd$ con $n = 1$ per l'aria.



Si ha interferenza costruttiva per una lunghezza d'onda λ per la quale

$$2d = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4d}{2k+1}$$

La lunghezza d'onda può dunque assumere solo un insieme discreto di valori.

Se λ_1 e λ_2 sono due lunghezze d'onda che danno interferenza costruttiva

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2k_1+1}{2k_2+1}$$

Quesito n. 2 – Seconda lunghezza d'onda.

Poiché $0.40\,\mu\text{m} \le \lambda_2 \le 0.80\,\mu\text{m}$, si trova che il rapporto soddisfa la condizione

$$1 \le \frac{2k_1+1}{2k_2+1} \le 2\,.$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori del rapporto per $0 \le k_1 \le 6$ e $0 \le k_2 \le 4$.

	$k_1 = 0$	1	2	3	4	5	6
$k_2 = 0$	1	3	5	7	9	11	13
1	0.33	1	**1.67**	2.33	3	3.67	4.33
2	0.20	0.60	1	**1.40**	**1.80**	2.20	2.60
3	0.14	0.43	0.71	1	**1.29**	**1.57**	**1.86**
4	0.11	0.33	0.56	0.78	1	**1.22**	**1.44**

Poiché i massimi rilevati sono solo due (di cui uno corrisponde a λ_1), occorre prendere in considerazione i valori di k per cui nella corrispondente riga (e colonna) della tabella compare un solo rapporto compreso tra 1 e 2.

L'unica coppia di valori di k compatibili con questi vincoli è $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$. Perciò

$$\lambda_2 = \frac{5}{3}\lambda_1 = 0.67\,\mu\text{m}\,.$$

Quesito n. 3 – Spessore dell'intercapedine.

Dalla relazione trovata all'inizio si ricava subito

$$d = \frac{(2k_1+1)\lambda_1}{4} = \frac{(2k_2+1)\lambda_2}{4} = 0.50\,\mu\text{m}$$

PROBLEMA n. 3 — Equilibrio

100 Punti

Quesito n. 1 – Diagramma delle forze e loro origine fisica.

Per l'equilibrio del contrappeso, la tensione (uniforme in modulo) T del filo che collega i due corpi appesi dev'essere KMg. Il filo che collega l'anello al soffitto non può che essere verticale: non agiscono forze laterali su di esso e la sfera non può comunque toccare il soffitto. Si distinguono due casi:

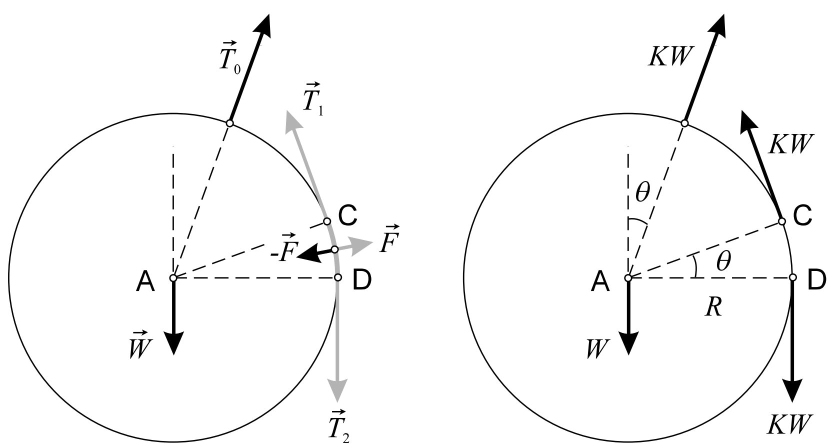
caso a) fra la sfera e l'anello B c'è un tratto di filo come indicato nella figura allegata al testo.

caso b) la sfera si trova a diretto contatto con l'anello B.

caso a)

Sulla sfera agiscono il suo peso, la tensione del filo che la sostiene e una forza dovuta all'interazione con il tratto di filo di sostegno del contrappeso che le si appoggia contro. Con riferimento alla figura seguente, a sinistra, le tre forze sono quelle tracciate in nero e indicate con $\vec{W}$, $\vec{T}_0$ e $-\vec{F}$, avendo indicato con $\vec{F}$ la forza che, per il terzo principio, la sfera esercita sul tratto di filo CD. Per valutarne l'intensità si devono considerare preliminarmente le forze agenti sulla stessa porzione di filo.

In C e in D il filo è tangente alla sfera. Sulla porzione di filo CD agiscono tre forze (rappresentate in grigio nella figura): la tensione $\vec{T}_1$ verso l'alto, quella verso il basso $\vec{T}_2$ e, come detto, la spinta $\vec{F}$ della sfera sul filo. Essendo il filo in equilibrio, la somma di queste tre forze dev'essere nulla, dunque $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -\vec{F}$.



Caso a

Il sistema di forze agente sulla sfera è dunque equivalente a quello mostrato nella figura a destra, le cui intensità e direzioni sono facilmente calcolabili. Infatti, per le intensità, si ha che $W = Mg$, $T_0 = T_1 = T_2 = KMg$ e per quanto riguarda le direzioni si osserva che essendo l'anello B in equilibrio i due tratti di filo al di sotto di esso devono formare lo stesso angolo θ con la verticale.

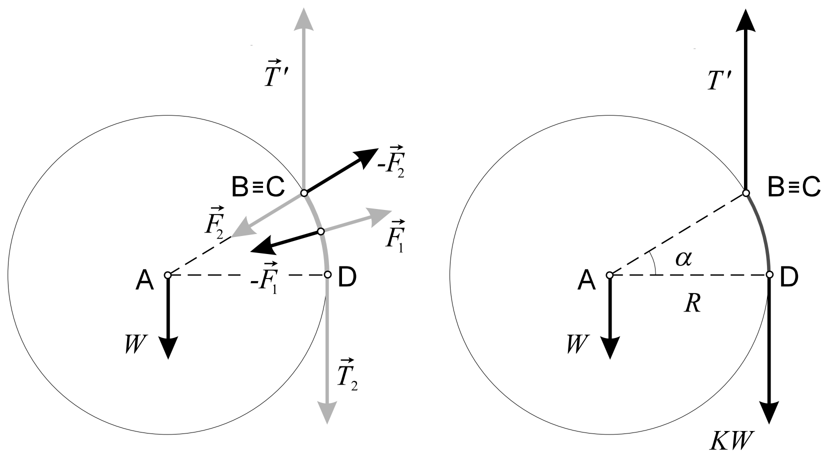
caso b)

Si procede in modo analogo al caso precedente, tenendo conto che adesso l'anello B coincide con C (vedere le figure seguenti). Sul tratto di filo CD agiscono come prima le due tensioni e la forza $\vec{F}_1$ dovuta alla sfera, la cui risultante è nulla: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_1 = 0$.

Anche sull'anello agiscono tre forze che per la condizione di equilibrio devono avere risultante nulla: la tensione $\vec{T}'$ verso l'alto, una forza pari a $-\vec{T}_1$ dovuta al tratto di filo CD e la forza $\vec{F}_2$ dovuta alla sfera: $\vec{T}' - \vec{T}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

Per chiarezza, nella figura a sinistra non sono state riportate le due forze opposte $\vec{T}_1$ e $-\vec{T}_1$ tangenti alla sfera in C; le altre sono tracciate in grigio.

Notare che essendo $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_1 + \vec{T}' - \vec{T}_1 + \vec{F}_2 = 0$ risulta $\vec{T}' + \vec{T}_2 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2$.



Caso b

Sulla sfera agiscono dunque le forze $\vec{W}$, $-\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_2$ (tracciate in nero) che, come si è fatto prima, possono essere sostituite da sistema di forze equivalente mostrato nella figura a destra: il peso Mg, la tensione $\vec{T}'$ verticale verso l'alto in B, e la tensione $\vec{T}_2$, di modulo KMg verticale verso il basso in D.

Quesito n. 2 – Lunghezza dell'arco CD.

caso a)Le componenti verticali delle forze (vedi figura precedente al punto 1.a) danno all'equilibrio $W + KW = 2KW\cos\theta$. Poiché il tratto di filo CD è lungo $R\theta$, segue che esso è

$$\widehat{\mathrm{CD}} = R \arccos \frac{K+1}{2K}\,.$$

caso b)

Il calcolo dei momenti delle forze rispetto a B ≡ C (vedi figura precedente al punto 1.b) fornisce all'equilibrio $WR\cos\alpha = KWR(1-\cos\alpha)$: da cui la lunghezza di CD è

$$\widehat{\mathrm{CD}} = R\alpha = R \arccos \frac{K}{K+1}\,.$$

I due casi si distinguono fisicamente a seconda del valore degli angoli: se θ, nel caso a), fosse maggiore di 45° il filo discendente non potrebbe più toccare la sfera. Quindi la condizione limite si ha quando

$$\frac{K+1}{2K} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{cioè} \quad K = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} \approx 2.4$$

Per tale valore (il minimo per cui la sfera tocca l'anello) è anche

$$\cos\alpha = \frac{K}{K+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

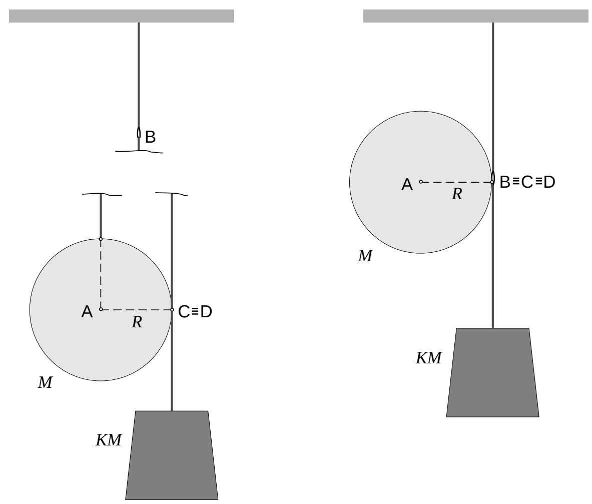
quindi anche $\alpha = 45°$, com'è logico per continuità.

Quesito n. 3 – Caso limite per $K \to 1$.

Se il contrappeso ha massa molto simile a quella della sfera (K tendente a 1), la relazione ottenuta per il caso a) ci dice che θ tende a zero, il che è conforme al senso fisico (la tensione del filo che regge la sfera è uguale al peso della sfera ma deve equilibrarlo, quindi dev'essere verticale). Ciò è possibile solo se la sfera è molto lontana da B; al limite il filo deve avere lunghezza infinita. Se ciò si verifica, il filo è tangente alla sfera e $\widehat{\mathrm{CD}} = 0$ (v. figura seguente a sinistra); se invece non si verifica, i due corpi si toccano e il problema non è risolubile perché non si conoscono le caratteristiche geometriche del contrappeso.

Quesito n. 4 – Caso limite per $K \to \infty$.

Quando invece K tende a infinito, cioè la sfera ha massa trascurabile rispetto a quella del contrappeso, essa rimane schiacciata contro l'anello e quindi siamo nel caso b) precedente. Questo perché quando θ è grande ($\theta > 45°$), C verrebbe a trovarsi al di sopra del punto di attacco del filo alla sfera, e ciò non ha senso fisico. Quindi, la sfera tocca l'anello e C coincide con B. In tal caso quando K è molto grande la lunghezza di CD tende nuovamente a zero perché il filo sotto B è allineato con quello al di sopra e il centro della sfera si trova all'altezza di B (v. figura seguente a destra). La formula ottenuta nel caso 2.b conferma queste considerazioni qualitative dando $\alpha = 0$, $\overset{\frown}{CD} = 0$.



Quesito n. 5 – Due casi particolari.

Per i casi numerici, dato che il valore di K che discrimina fra i due casi discussi vale circa 2.4, per $K = 2$ si deve considerare la formula del caso a), quindi è $\overset{\frown}{CD} = 36\,\text{cm}$, per $K = 4$ si deve usare quella del caso b), quindi $\overset{\frown}{CD} = 32\,\text{cm}$.

PROBLEMA n. 4 — Lampada stroboscopica

100 Punti

Quesito n. 1 – Valore della carica a regime.

1. Il valore di regime della carica sul condensatore si determina facendo il limite per t che tende a infinito; risulta $q(t) = Q$; in queste condizioni la corrente nel ramo del condensatore è nulla e dunque la tensione ai capi di C (e di R_2) è

$$V_C = \frac{V R_2}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad Q = CV \frac{R_2}{R_1 + R_2} \,;$$

essendo

$$\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \quad \text{risulta} \quad Q = \frac{V\tau}{R_1} \,.$$

Quesito n. 2 – Verifica dell'equazione data.

Seguendo la traccia data nel testo:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C} + \frac{q_0 - Q}{C} e^{-t/\tau} \quad \text{(d.d.p. ai capi del condensatore);}$$

$$I_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{q_0 - Q}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{(corrente nel ramo del condensatore);}$$

$$I_2(t) = \frac{V_C(t)}{R_2} = \frac{Q}{R_2 C} + \frac{q_0 - Q}{R_2 C} e^{-t/\tau} \quad \text{(corrente in } R_2\text{);}$$

$$I_1(t) = \frac{(V - V_C(t))}{R_1} = \frac{V}{R_1} - \frac{Q}{R_1 C} - \frac{q_0 - Q}{R_1 C} e^{-t/\tau} \quad \text{(corrente in } R_1\text{).}$$

La condizione da verificare a ciascun nodo è $I_1 = I_C + I_2$ ovvero $I_1 - I_C - I_2 = 0$:

$$I_1 - I_C - I_2 = \frac{V}{R_1} - \frac{Q}{R_1 C} - \frac{q_0 - Q}{R_1 C} e^{-t/\tau} + \frac{q_0 - Q}{\tau} e^{-t/\tau} - \frac{Q}{R_2 C} - \frac{q_0 - Q}{R_2 C} e^{-t/\tau} =$$

$$= (q_0 - Q)\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_2 C}\right) e^{-t/\tau} + \frac{V}{R_1} - Q\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right) =$$

$$= (q_0 - Q)\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} + \frac{V}{R_1} - \frac{Q}{\tau} = 0$$

La verifica è immediata usando le espressioni di Q e di τ date sopra, al punto 1.

Quesito n. 3 – Grafico della $V_C(t)$.

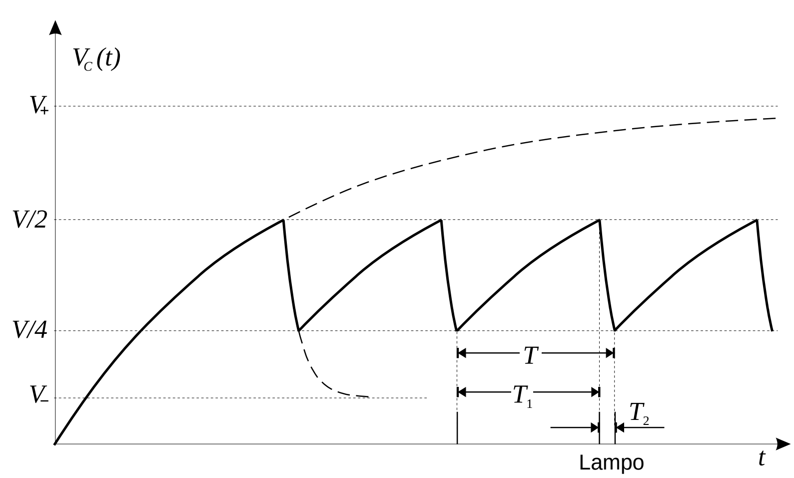
Nella condizione iniziale (condensatore scarico) la d.d.p. ai capi della lampada è nulla e dunque la resistenza della lampada è R_+; il condensatore si carica verso la d.d.p. di regime

$$V_+ = V \frac{R_+}{R_1 + R_+} \quad \text{con una costante tempo} \quad \tau_+ = \frac{R_1 R_+}{R_1 + R_+} C \approx R_1 C \quad (\text{essendo } R_+ \gg R_1)$$

fin quando la d.d.p. ai suoi capi raggiunge il valore V_2. A questo punto la resistenza della lampada diventa R_- (e la lampada emette luce) mentre il valore di regime della d.d.p. diventa

$$V_- = V \frac{R_-}{R_1 + R_-} \quad \text{e la costante tempo} \quad \tau_- = \frac{R_1 R_-}{R_1 + R_-} C \approx R_- C \quad (\text{essendo } R_- \ll R_1).$$

Il condensatore si scarica fin quando la d.d.p. diventa minore di V_1. Successivamente il fenomeno si ripete; essendo $R_- \ll R_1$ il tempo di scarica è molto breve rispetto a quello di carica e dunque la luce è emessa come una successione periodica di lampi.



Quesito n. 4 – Frequenza dei lampi.

Il tempo per passare dal valore V' a V'' della d.d.p. ai capi del condensatore (o, corrispondentemente, dalla carica q' a q'') si ottiene imponendo

$$q' = q(t_1) = Q + (q_0 - Q)e^{-t_1/\tau}$$
$$q'' = q(t_2) = Q + (q_0 - Q)e^{-t_2/\tau}$$

da cui, espresso anche in termini delle rispettive d.d.p., risulta

$$\frac{q'-Q}{q''-Q} = e^{(t_2-t_1)/\tau} \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \tau \ln\frac{q'-Q}{q''-Q} = \tau \ln\frac{V' - VR_2/(R_1+R_2)}{V'' - VR_2/(R_1+R_2)}$$

Il periodo del sistema è la somma del tempo di carica T_1 e del tempo di scarica T_2; il primo è il tempo per passare dalla tensione $V_1 = V/4$ a $V_2 = V/2$ con costante tempo τ_+, essendo $Q = Q_+$; il secondo per passare da V_2 a V_1 con costante tempo τ_- con $Q = Q_-$.

$$T_1 = \tau_+ \ln\frac{V/2 - VR_+/(R_1+R_+)}{V/4 - VR_+/(R_1+R_+)}$$
$$T_2 = \tau_- \ln\frac{V/2 - VR_-/(R_1+R_-)}{V/4 - VR_-/(R_1+R_-)}$$

Il periodo dei lampi è quindi $T = T_1 + T_2$ e con i valori dati di R_+ ed R_- si ha

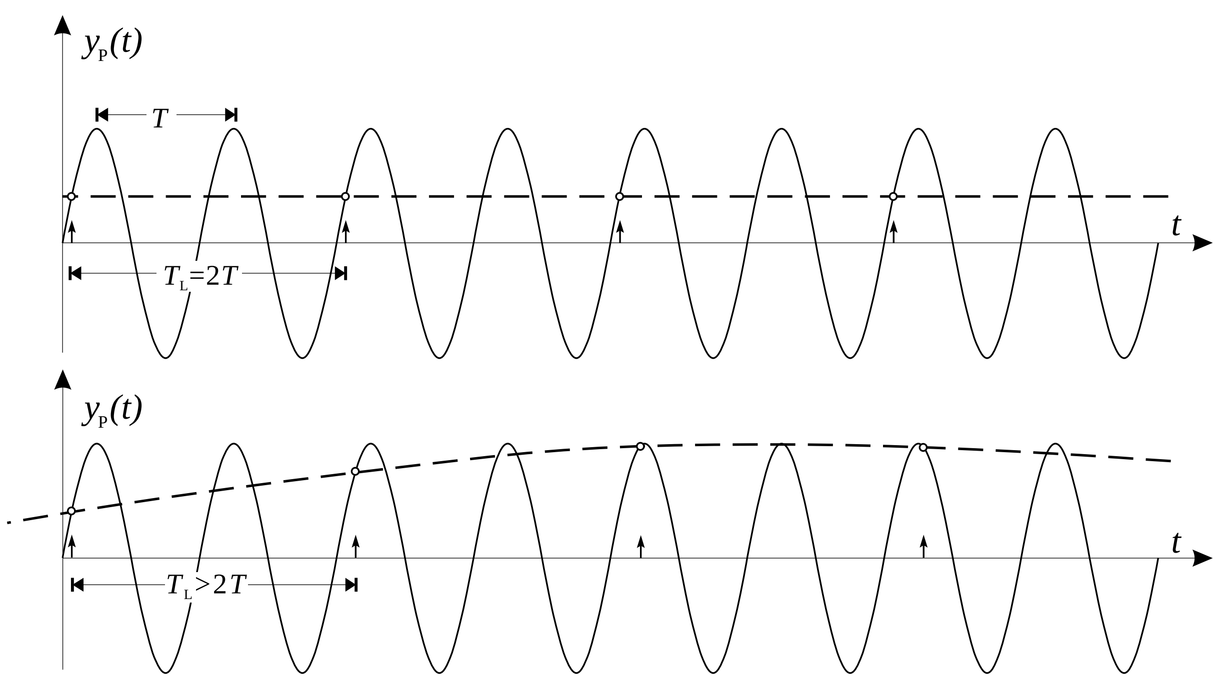
$$T = \frac{100}{101}R_1C \ln\frac{299}{189} + \frac{1}{101}R_1C \ln\frac{198}{97} \approx (0.408 + 0.007)\, R_1C = 0.415\, R_1C\,.$$

La frequenza dei lampi è

$$\nu = \frac{1}{0.415\, R_1C} = 5.13\,\mathrm{Hz}$$

Quesito n. 5 – Frequenza di oscillazione della corda.

Inizialmente il periodo della lampada è minore di quello della corda; ogni volta che la corda appare ferma il periodo della lampada è un multiplo di quello della corda: nella figura in alto è rappresentata l'oscillazione $y_\mathrm{P}(t)$ di un punto qualsiasi P della corda e sono indicate le posizioni di questo punto nel momento dei successivi lampi, per $T_\mathrm{L} = 2T$.



Quando si raggiunge la frequenza minima dei lampi, secondo quanto affermato nel testo, il periodo della lampada ($T_{\mathrm{L}} = 1/\nu_0$) è poco superiore al doppio del periodo della corda; allora le posizioni apparenti del punto P della corda "simulano" un'oscillazione più lenta (sinusoide tratteggiata nella figura in basso).

Indicando con $T_{\mathrm{L}} = 1/\nu_0$ il periodo della lampada in queste condizioni, e con T e T_{app} i periodi, reale e apparente, di oscillazione della corda, valgono le relazioni

$$T_{\mathrm{app}} = (2n+1)\,T = nT_{\mathrm{L}}$$

Dalle due equazioni si ricavano n e T:

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{\mathrm{app}}}{T} - 1\right) \quad \text{e} \quad T = \frac{T_{\mathrm{app}}\,T_{\mathrm{L}}}{2T_{\mathrm{app}} + T_{\mathrm{L}}} = 0.23\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \nu = 4.33\,\mathrm{Hz}$$

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica

presso Liceo Scientifico "U. Morin"

VENEZIA MESTRE

fax: 041.584.1272

e-mail: `olifis@libero.it`