Acqua e oggetti (10 pt)

In questo problema consideriamo i fenomeni causati dall'interazione tra acqua e oggetti collegati alla tensione superficiale. La parte A tratta situazioni di moto, mentre le parti B e C riguardano situazioni statiche.

Se necessario, si può usare il fatto che se la funzione $y(x)$ soddisfa l'equazione differenziale $y''(x) = ay(x)$ (a è una costante positiva), allora la sua soluzione generale è $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, dove A e B sono costanti arbitrarie.

Parte A. Fusione di gocce d'acqua (2.0 punti)

Come mostrato in Fig. 1, consideriamo due gocce d'acqua sferiche stazionarie sulla superficie di un materiale super-idrofobo, cioè per il quale esistono intense forze repulsive tra il materiale e l'acqua.

Sulla superficie sono posizionate due gocce d'acqua sferiche identiche inizialmente vicine tra loro; successivamente queste due gocce si fondono dopo essersi toccate e formano una goccia d'acqua sferica più grande, che improvvisamente salta verso l'alto.

A.1	Il raggio a di entrambe le gocce d'acqua prima della fusione è $100\ \mu$m. La densità dell'acqua ρ è 1.00×10^3 kg/m^3. La tensione superficiale γ è 7.27×10^{-2} J/m^2. Una frazione k della differenza di energia di superficie ΔE tra prima e dopo la fusione è trasformata in energia cinetica della sfera che salta verso l'alto. Determinare quindi la velocità iniziale di salto, v, della goccia d'acqua fusa con due cifre significative in base alle seguenti ipotesi: • $k = 0.06$ • Prima e dopo la fusione, il volume totale di acqua viene conservato.	2.0pt

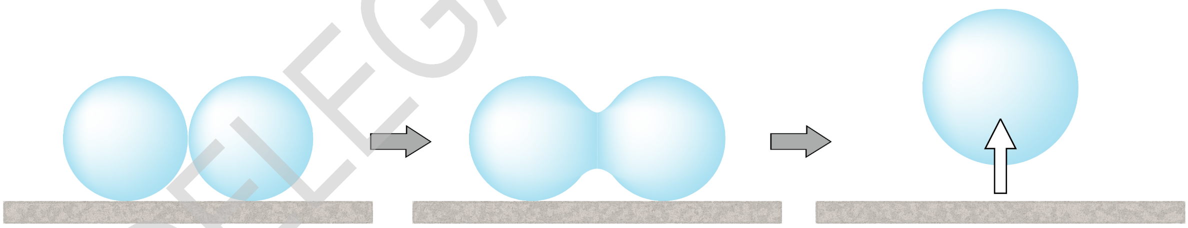

Fig. 1: Fusione di due gocce d'acqua e salto della goccia d'acqua fusa.

Parte B. Una tavola posizionata verticalmente (4.5 punti)

Una tavola piatta viene immersa verticalmente in acqua. Le figure 2(a) e 2(b) mostrano rispettivamente le forme della superficie dell'acqua per materiali idrofili (attrattivi) e idrofobi. Si trascuri lo spessore della tavola.

La superficie della tavola si trova sul piano yz e la superficie orizzontale dell'acqua lontana dalla tavola si trova sul piano xy con $z = 0$. La forma della superficie non dipende dalla coordinata y. Sia $\theta(x)$ l'angolo tra la superficie dell'acqua e il piano orizzontale in un punto (x, z) della superficie dell'acqua nel piano xz. Qui $\theta(x)$ è misurato rispetto all'asse positivo x e la rotazione antioraria è considerata positiva. Sia $\theta(x)$ pari a $\theta_0$nel punto di contatto tra la tavola e la superficie dell'acqua ($x = 0$). Nel seguito, θ_0 è fissato dalle proprietà del materiale della tavola.

La densità dell'acqua ρ e la tensione superficiale dell'acqua γ sono uniformi. L'accelerazione gravitazionale è data da g. Si assuma uniforme la pressione atmosferica P_0. Si noti che l'unità di misura della tensione superficiale è J/m^2 ma anche N/m. Si determini la forma della superficie dell'acqua con i seguenti passaggi.

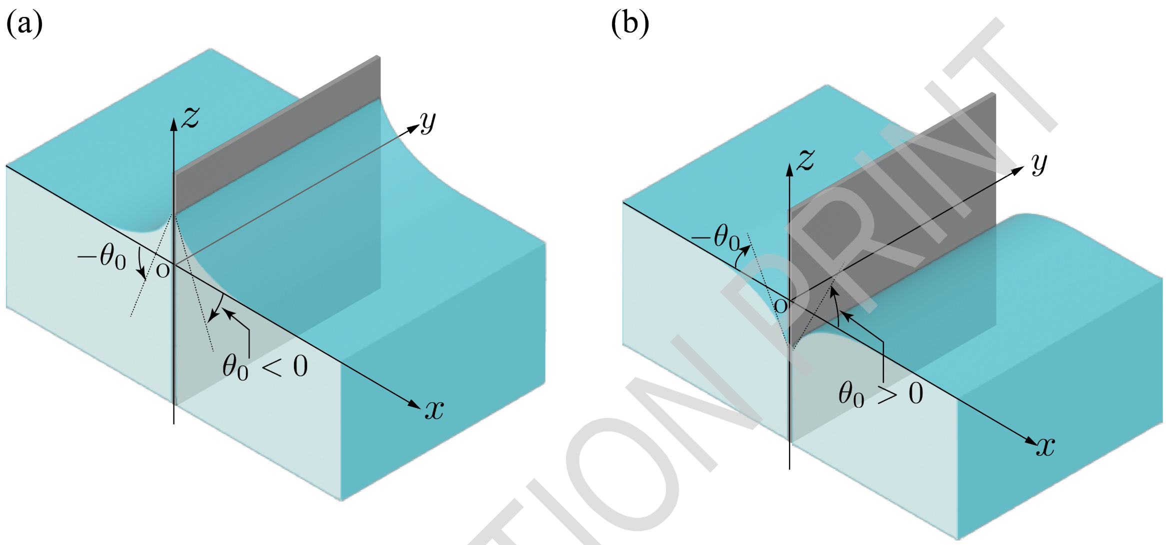

Fig. 2: Tavole immerse verticalmente nell'acqua. (a) Nel caso di tavola idrofila; (b) nel caso di tavola idrofoba.

B.1	Si consideri il caso di una tavola idrofila, come mostrato nella Fig. 2(a). Si noti che la pressione dell'acqua, P, soddisfa le condizioni $P < P_0$ per $z > 0$ e $P = P_0$ per $z = 0$. Si determini P alla quota z in funzione di ρ, g, z, e P_0.	0.6pt

B.2	Si consideri un blocco d'acqua la cui forma è mostrata ombreggiata in Fig.3(a). La sua sezione trasversale nel piano xz è mostrata dall'area tratteggiata in Fig.3(b). Siano z_1 e z_2 rispettivamente le coordinate del bordo sinistro e destro del confine (superficie dell'acqua) tra il blocco d'acqua e l'aria. Ricavare la componente orizzontale (componente x) f_x della forza risultante per unità di lunghezza lungo l'asse y, esercitata sul blocco d'acqua a causa della pressione, in funzione di ρ, g, z_1 e z_2. Si noti che la presenza della pressione atmosferica P_0 non determina una forza orizzontale netta sul blocco d'acqua.	0.8pt

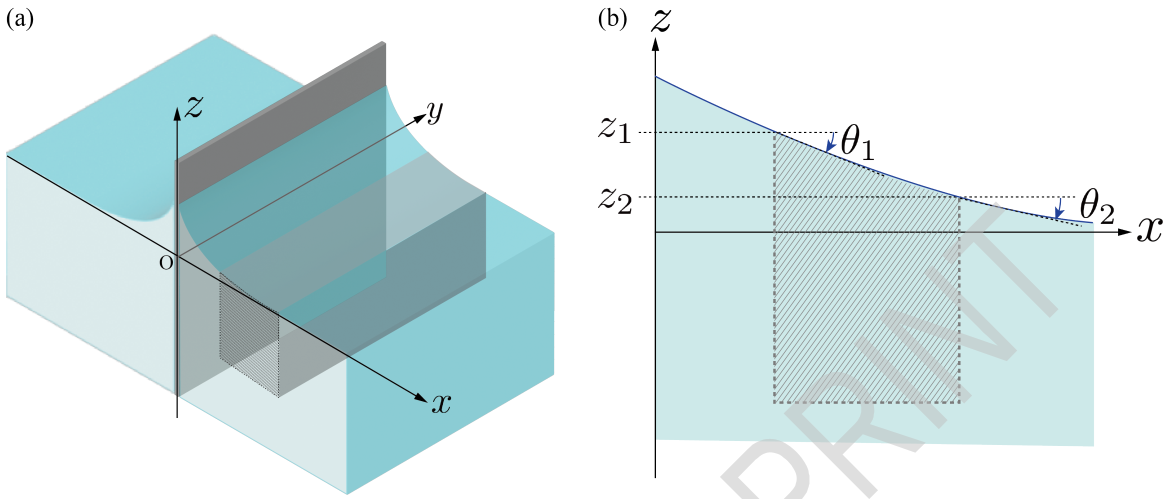

Fig. 3: Forma del blocco d'acqua. (a) Vista a volo d'uccello e (b) vista in sezione.

B.3	La tensione superficiale che agisce sul blocco d'acqua è bilanciata dalla forza f_x discussa in B.2. Si definiscano rispettivamente θ_1 e θ_2 gli angoli tra la superficie dell'acqua e il piano orizzontale ai bordi sinistro e destro. Ricavare f_x in funzione di γ, θ_1 e θ_2.	0.8pt

B.4 La seguente equazione vale in un punto arbitrario (x, z) sulla superficie dell'acqua, (0.8pt)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constant.} \tag{1}$$

Determinare l'esponente a ed esprimere la costante ℓ in funzione di γ e ρ. Si noti che questa equazione è valida per materiali della tavola sia idrofili sia idrofobi.

B.5	Nell'equazione (1) in B.4, si assuma che la variazione della superficie dell'acqua sia lieve, cioè $\vert z'(x)\vert \ll 1$, in modo da poter sviluppare $\cos\theta(x)$ in serie di $z'(x)$ fino al secondo ordine. Successivamente, differenziando l'equazione risultante rispetto a x, si ottiene l'equazione differenziale soddisfatta da $z(x)$. Risolvere questa equazione differenziale e determinare $z(x)$ per $x \geq 0$ in funzione di $\tan\theta_0$ e ℓ. Si noti che le dimensioni verticali nelle Fig. 2 e 3 sono esagerate per ragioni grafiche e non soddisfano la condizione $\vert z'(x)\vert \ll 1$.	1.5pt

Parte C. Interazione tra due aste (3.5 punti)

Le aste identiche A e B, di uno stesso materiale, galleggiano parallelamente tra loro sulla superficie dell'acqua e sono poste simmetricamente alla stessa distanza dall'asse y (Fig. 4).

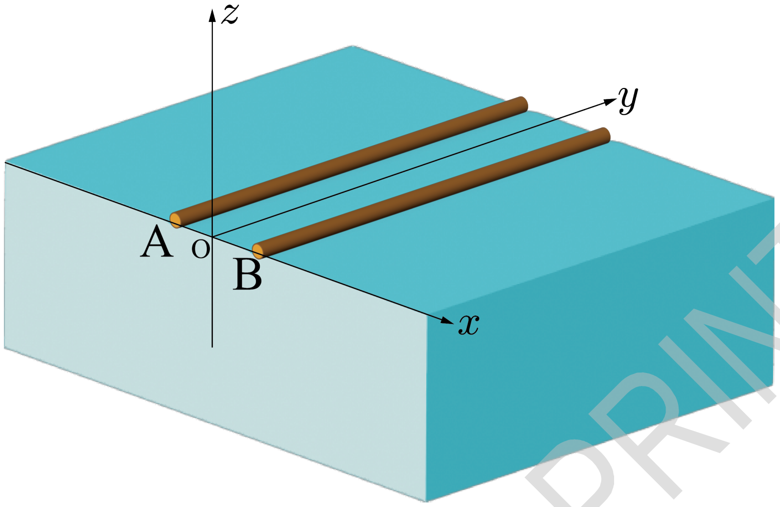

Fig. 4: Due aste A e B che galleggiano sulla superficie dell'acqua.

C.1	Nei punti di contatto tra l'asta B e l'acqua, si definiscano le coordinate z e gli angoli come mostrato in Fig. 5. Determinare la componente orizzontale della forza, F_x, sull'asta B per unità di lunghezza lungo l'asse y in funzione di θ_a, θ_b, z_a, z_b, ρ, g, e γ.	1.0pt

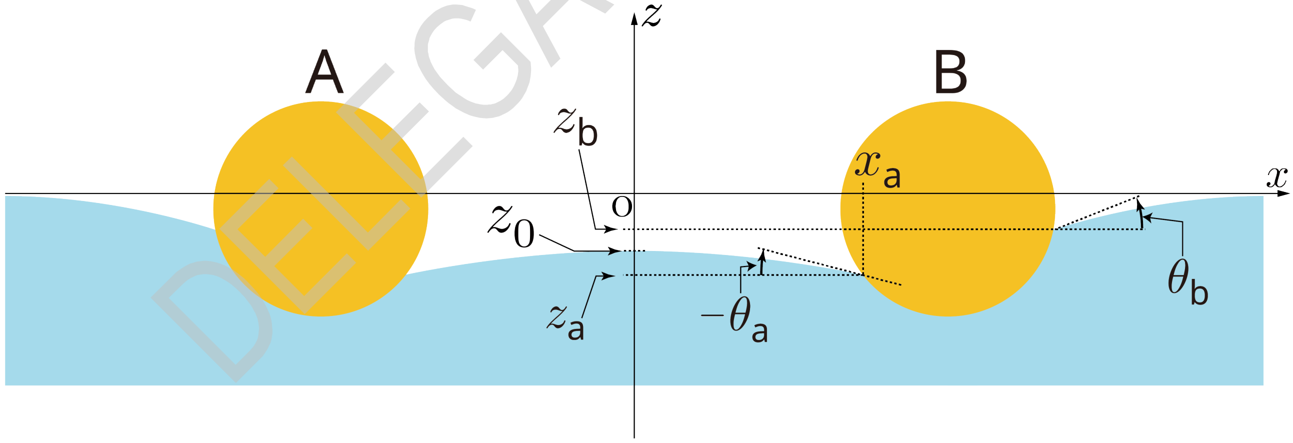

Fig. 5: Vista in sezione verticale di due aste che galleggiano sulla superficie dell'acqua.

C.2	Si definisca z_0 la coordinata z della superficie dell'acqua nel punto medio tra le due aste nel piano xz. Esprimere la forza F_x ottenuta in C.1 senza utilizzare θ_a, θ_b, z_a e z_b.	1.5pt

C.3	Sia x_a la coordinata x del punto di contatto tra la superficie dell'acqua e la parte sinistra dell'asta B. Utilizzando l'equazione differenziale ottenuta in B.4, esprimere la coordinata z_0 del livello dell'acqua del punto medio di queste due aste A e B in funzione di x_a e z_a. Si può utilizzare la costante ℓ introdotta in B.4.	1.0pt