

Stelle di neutroni (10 punti)

In questo problema discutiamo la stabilità dei nuclei di grandi dimensioni e stimiamo teoricamente e sperimentalmente la massa delle stelle di neutroni.

Parte A. Massa e stabilità dei nuclei (2.5 punti)

L'energia a riposo di un nucleo $m(Z, N)c^2$ costituito da Z protoni e N neutroni è minore della somma delle energie a riposo dei protoni e dei neutroni, di seguito chiamati nucleoni, per l'energia di legame $B(Z, N)$, dove c è la velocità della luce nel vuoto. Ignorando correzioni minori, possiamo esprimere l'energia di legame in termini dei coefficienti di volume a_V , di superficie a_S , di energia di Coulomb a_C e di energia di simmetria a_{sym} , nel modo seguente:

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (1)$$

dove $A = Z + N$ è il numero di massa e m_N è la massa di un nucleone. Nei calcoli, utilizzare $a_V \approx 15.8$ MeV, $a_S \approx 17.8$ MeV, $a_C \approx 0.711$ MeV, e $a_{\text{sym}} \approx 23.7$ MeV (MeV = 10^6 elettronvolt).

A.1 Considerata la condizione $Z = N$, determinare A per massimizzare l'energia di legame per nucleone, B/A . 0.9pt

A.2 Per un determinato valore di A , il numero atomico Z^* del nucleo più stabile è determinato massimizzando $B(Z, A - Z)$. Per $A = 197$, calcolare Z^* utilizzando l'equazione (1). 0.9pt

A.3 Un nucleo con A grande si divide in nuclei più leggeri attraverso la fissione, al fine di minimizzare l'energia totale a riposo. Per semplicità, consideriamo uno dei molteplici modi per dividere un nucleo (Z, N) in due nuclei uguali, che si può verificare quando vale la seguente relazione energetica: 0.7pt

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Quando questa relazione viene scritta come

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

determinare C_{fission} con due cifre significative.

Parte B. Stella di neutroni come nucleo gigante (1.5 punti)

Nel caso di nuclei di grandi dimensioni con un numero di massa sufficientemente grande $A > A_c$ dove A_c è un valore di soglia, questi nuclei rimangono stabili rispetto alla fissione nucleare a causa dell'energia di legame sufficientemente grande dovuta alla gravità.

- B.1** Assumiamo che $N = A$ e $Z = 0$ si realizzino nel caso di A sufficientemente grande e assumiamo che l'Eq. (1) continui a valere con l'aggiunta dell'energia di legame gravitazionale. L'energia di legame gravitazionale è 1.5pt

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

dove $M = m_N A$ e $R = R_0 A^{1/3}$ con $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$ sono rispettivamente la massa e il raggio del nucleo.

Per $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$, determinare a_{grav} nell'unità MeV con una cifra significativa. Dopo, ignorando il termine di superficie, stimare A_c con una cifra significativa. Nei calcoli, utilizzare $m_N c^2 \simeq 939 \text{ MeV}$ e $G = \hbar c / M_P^2$ come $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$ e $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$.

Parte C. Stella di neutroni in un sistema binario (6.0 punti)

Alcune stelle di neutroni sono pulsar che emettono regolarmente onde elettromagnetiche di periodo costante, che qui chiamiamo "luce" per semplicità. Le stelle di neutroni formano spesso sistemi binari con una Nana Bianca. Consideriamo la configurazione stellare mostrata nella Fig. 1, dove un impulso di luce da una stella di neutroni **N** alla Terra **E** passa vicino alla Nana Bianca **W** del sistema binario. La misurazione di questi impulsi, influenzati dalla gravità della stella, porta a una stima accurata della massa di **W**, come spiegato di seguito, e quindi alla stima della massa di **N**.

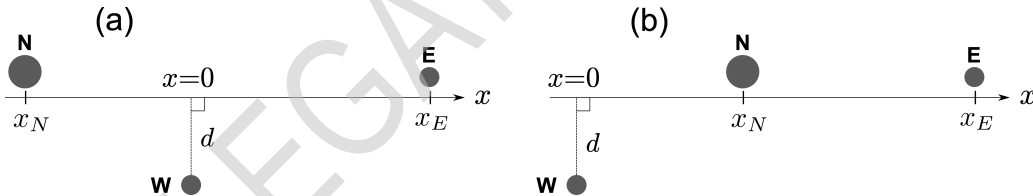
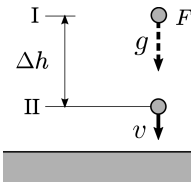


Fig. 1: Configurazione del percorso dell'impulso luminoso.

- C.1** Come mostrato nella figura seguente, sotto l'accelerazione gravitazionale costante g fissiamo i due livelli I e II con differenza di altezza $\Delta h (> 0)$. Orologi identici sono posti in I, in II e in F (sistema in caduta libera) e indicati rispettivamente con orologio-I, orologio-II e orologio- F . 1.0pt



Impostazione dell'esperimento mentale.

Assumiamo che un osservatore solidale all'orologio- F sia inizialmente a riposo alla stessa altezza dell'orologio-I e regoliamo l'orologio- F in modo che la sua unità di tempo $\Delta\tau_F$ e quella dell'orologio-I siano uguali $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$. Lasciamo ora cadere liberamente l'orologio- F (considerare inerziale il riferimento in cui esso è a riposo) che passa nei pressi dell'orologio-II con una velocità v . L'unità di tempo dell'orologio- F rimane $\Delta\tau_I$. In questo istante, l'orologio-II si muove rispetto all'orologio- F verso l'alto con velocità v , così che la dilatazione temporale può essere determinata usando le trasformazioni di Lorentz. Sia $\Delta\tau_I$ l'unità di tempo $\Delta\tau_{II}$ dell'orologio-II misurata dal riferimento di F . Determinare $\Delta\tau_{II}$ in termini di $\Delta\tau_I$ al primo ordine in funzione di $\Delta\phi/c^2$, dove $\Delta\phi = g\Delta h$ è la differenza di potenziale gravitazionale, cioè la differenza di energia potenziale gravitazionale per unità di massa.

- C.2** Per effetto del potenziale gravitazionale ϕ , i ritardi temporali modificano la velocità effettiva della luce, c_{eff} , osservata all'infinito anche se la velocità della luce locale è c . Se $\phi(r = \infty) = 0$, c_{eff} può essere data al primo ordine in funzione di ϕ/c^2 come 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

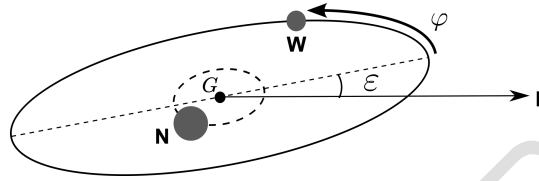
che comprende l'effetto della distorsione spaziale che non era presente in **C.1**. Si tenga presente che il percorso della luce può essere approssimato a una linea retta.

Come mostrato in Fig. 1, prendiamo l'asse x lungo il percorso della luce dalla stella di neutroni **N** alla Terra **E** e poniamo $x = 0$ nel punto in cui la Nana Bianca **W** è alla minima distanza dal percorso della luce. Sia $x_N (< 0)$ la coordinata x di **N**, $x_E (> 0)$ quella di **E** e d la distanza tra **W** e il percorso luminoso.

Stimare la variazione del tempo di arrivo Δt di un impulso luminoso da **N** a **E** causata dalla presenza della Nana Bianca di massa M_{WD} ed esprimere la risposta in forma semplificata, cioè trascurando termini di ordine superiore nelle seguenti piccole quantità: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$, e $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Se necessario utilizzare la seguente formula.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C. \quad (\log \text{ è il logaritmo naturale})$$

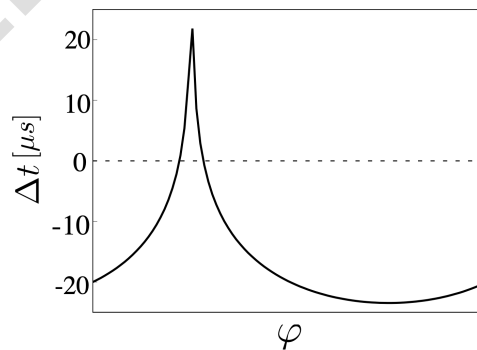
- C.3** Come mostrato di seguito, in un sistema stellare binario si suppone che **N** e **W** si muovano su orbite circolari, cioè con eccentricità nulla, intorno al centro di massa G sul piano dell'orbita. Sia ε l'angolo di inclinazione orbitale misurato dal piano dell'orbita alla retta orientata GE ; sia L la distanza tra **N** e **W** e M_{WD} la massa della Nana Bianca. Nel seguito, assumiamo $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt



Sistema stellare binario.

Da un punto di osservazione lontano da **N**, si osservino gli impulsi luminosi che da **N** raggiungono **E**. Il percorso della luce verso **E** varia nel tempo a seconda della posizione reciproca di **N** e **W**. Il ritardo del tempo impiegato da ogni impulso per arrivare in **E** assume il valore massimo Δt_{\max} per $x_N \simeq -L$ e il valore minimo Δt_{\min} per $x_N \simeq L$. Calcolare $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$ in forma semplificata, cioè trascurando termini di ordine superiore nelle seguenti piccole quantità, come fatto in **C.2**. Si assuma che gli effetti dovuti alla gravità di oggetti stellari diversi da **W** si compensino in $\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}$.

- C.4** La figura seguente mostra i ritardi dei tempi di arrivo osservati in funzione della fase orbitale φ per il sistema stellare binario con $L \approx 6 \times 10^6$ km e $\cos \varepsilon \approx 0.99989$. Stimare M_{WD} in unità di massa solare M_\odot e determinare il rapporto M_{WD}/M_\odot con una cifra significativa. In questo caso si può utilizzare la relazione approssimata $GM_\odot/c^3 \approx 5 \mu s$. 0.8pt

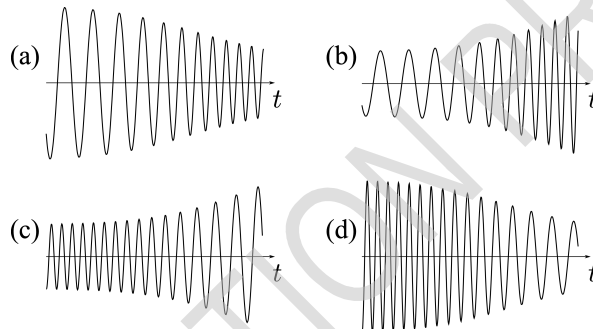


Ritardo del tempo di arrivo Δt osservato in funzione della fase orbitale φ

(vedi figura in C.3) per localizzare **N** e **W** sulle orbite.

- C.5** In un sistema binario di stelle di neutroni, le due stelle cedono energia e momento angolare attraverso l'emissione di onde gravitazionali e infine collidono fino a fondersi. Per semplicità, consideriamo un moto circolare con raggio R e velocità angolare ω , per cui trascurando gli effetti relativistici si ha $\omega = \chi R^p$ con la costante χ che non dipende né da ω né da R . Determinare il valore di p . 0.4pt

- C.6** L'ampiezza dell'onda gravitazionale emessa dal sistema binario in **C.5** è proporzionale a $R^2\omega^2$. La figura seguente mostra qualitativamente quattro diversi profili temporali delle onde gravitazionali osservate prima della collisione tra due stelle. Selezionare il profilo più appropriato. 0.2pt



Profili temporali delle onde gravitazionali osservate.