

Lenti elettrostatiche (10 punti)

Considera un anello metallico di raggio R , uniformemente carico con carica totale q . L'anello è un toroide cavo di spessore $2a \ll R$. Questo spessore può essere trascurato nelle parti A, B, C, ed E. Il piano xy coincide con il piano dell'anello, mentre l'asse z è ad esso perpendicolare, come mostrato nella Figura 1. Nelle parti A e B può essere necessario utilizzare la formula (sviluppo in serie di Taylor)

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \text{ quando } x \ll 1.$$

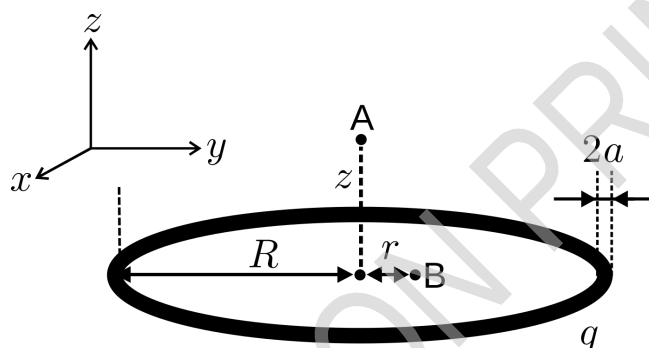


Figura 1. Un anello carico di raggio R .

Parte A. Il potenziale elettrostatico sull'asse dell'anello. (1 punto)

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.1 | Calcola il potenziale elettrostatico $\Phi(z)$ lungo l'asse dell'anello ad una distanza z dal suo centro (punto A in Figura 1). | 0.3pt |
| A.2 | Calcola il potenziale elettrostatico $\Phi(z)$ al primo ordine non costante in z , assumendo $z \ll R$. | 0.4pt |
| A.3 | Un elettrone (massa m e carica $-e$) è posto nel punto A (Figura 1, $z \ll R$). Qual è l'espressione della forza che agisce sull'elettrone? Dall'espressione della forza determina il segno di q in modo che il moto risultante corrisponda ad un moto oscillatorio. L'elettrone in movimento non influenza la distribuzione di carica sull'anello. | 0.2pt |
| A.4 | Qual è la frequenza angolare ω di queste oscillazioni armoniche? | 0.1pt |

Parte B. Potenziale elettrostatico nel piano dell'anello (1.7 punti)

In questa parte del problema dovrai analizzare il potenziale $\Phi(r)$ nel piano dell'anello ($z = 0$) per $r \ll R$ (punto B in Figura 1). Al primo ordine non costante in r il potenziale elettrostatico è dato da $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$.

B.1 Determina l'espressione per β . Potresti aver bisogno dello sviluppo in serie di Taylor fornito precedentemente. 1.5pt

B.2 Un elettrone è posto nel punto B (Figura 1, $r \ll R$). Qual è l'espressione della forza che agisce sull'elettrone? Dall'espressione della forza determina il segno di q in modo che il moto risultante corrisponda ad un moto oscillatorio. L'elettrone in movimento non influenza la distribuzione di carica sull'anello. 0.2pt

Parte C. La lunghezza focale della lente elettrostatica idealizzata: processo di carica istantanea (2.3 punti)

Si vuole costruire un dispositivo per focalizzare gli elettroni — una lente elettrostatica. Si consideri il seguente schema. L'anello è posizionato perpendicolarmente all'asse z come mostrato in Figura 2. Abbiamo una sorgente che ammette a richiesta pacchetti di elettroni non relativistici. L'energia cinetica di questi elettroni è $E = mv^2/2$ (v è la velocità) e vengono emessi dalla sorgente ad un istante perfettamente determinato. Il sistema è programmato in modo che l'anello sia a carica nulla per la maggior parte del tempo ma viene caricato con una carica q quando gli elettroni sono ad una distanza minore di $d/2$ ($d \ll R$) dal piano dell'anello (regione ombreggiata in grigio nella Figura 2, chiamata "regione attiva"). Nella parte C assumeremo che i processi di carica e la scarica siano istantanei e che il campo elettrico "riempia lo spazio" in maniera altrettanto istantanea. Trascureremo inoltre l'influenza dei campi magnetici e assumeremo che la velocità degli elettroni nella direzione z sia costante. L'elettrone in movimento non influenza la distribuzione di carica sull'anello.

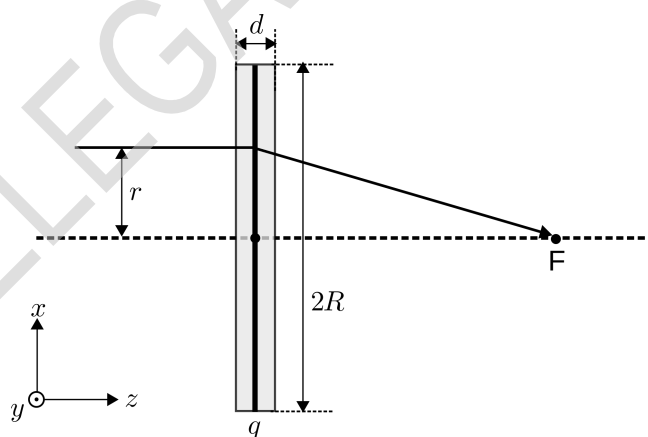


Figura 2. Un modello di lente elettrostatica.

C.1 Determina la lunghezza focale f di questa lente. Assumi che $f \gg d$. Esprimi il tuo risultato in termini della costante β della domanda B.1 e di altre quantità note. Assumi che prima di raggiungere la "regione attiva" il moto del pacchetto di elettroni sia parallelo all'asse z e che $r \ll R$. Il segno di q dovrebbe essere scelto in modo che la lente sia convergente. 1.3pt

In realtà la sorgente di elettroni è posizionata sull'asse z ad una distanza $b > f$ dal centro dell'anello. Tieni conto del fatto che gli elettroni non si muovono più parallelamente all'asse z prima di raggiungere



la "regione attiva", ma sono emessi da una sorgente puntiforme con un angolo $\gamma \ll 1$ rad rispetto all'asse z . Gli elettroni sono focalizzati in un punto posto a distanza c dal centro dell'anello.

C.2 Trova c . Esprimi la tua risposta in termini della costante β della domanda B.1 e di altre quantità note. 0.8pt

C.3 L'equazione dei punti coniugati 0.2pt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$$

è soddisfatta dalle lenti elettrostatiche? Rispondi calcolando esplicitamente $1/b + 1/c$.

Parte D. L'anello come condensatore (3 punti)

Il modello considerato precedentemente era idealizzato e abbiamo assunto che l'anello venga caricato istantaneamente. Nella realtà il processo di carica non è istantaneo poiché l'anello è un condensatore con una capacità finita C . In questa parte studieremo le proprietà di questo condensatore. Potrebbero servirti i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

e

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1 Calcola la capacità C dell'anello. Considera che l'anello ha una larghezza finita $2a$ ma ricorda che $a \ll R$. 2.0pt

Quando gli elettroni raggiungono la "regione attiva" l'anello è collegato ad un generatore di differenza di potenziale V_0 (Figura 3). Quando gli elettroni oltrepassano la "regione attiva" l'anello viene messo a terra. La resistenza del contatto è R_0 e la resistenza dell'anello stesso può essere trascurata.

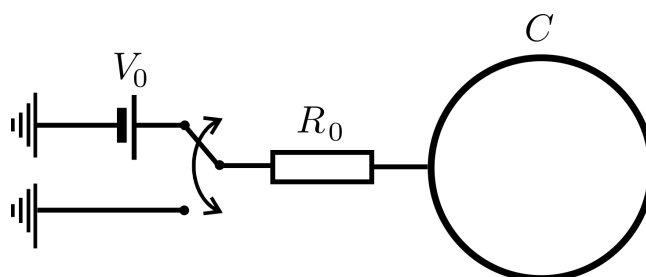


Figura 3. Processo di carica della lente elettrostatica.



- D.2** Determina la dipendenza dal tempo della carica sull'anello, $q(t)$, e disegna un grafico schematico di questa dipendenza. L'istante $t = 0$ corrisponde all'istante in cui gli elettroni attraversano il piano dell'anello. Qual è la carica sull'anello q_0 quando il valore assoluto $q(t)$ è massimo? La capacità dell'anello è C (cioè non devi usare la vera espressione trovata in D.1). **1.0pt**
- Nota:* la polarità indicata nella Figura 3 è riportata solo a scopo illustrativo. Il segno dovrebbe essere scelto in modo che la lente sia convergente.

Parte E. Lunghezza focale di una lente più realistica: processo di carica non istantanea (2 punti)

In questa parte del problema, considereremo il comportamento di una lente più realistica. Qui trascureremo di nuovo lo spessore dell'anello $2a$ e assumeremo che gli elettroni viaggiano parallelamente all'asse z prima di raggiungere la "regione attiva". Invece il processo di carica dell'anello non è più istantaneo.

- E.1** Trova la lunghezza focale f della lente. Assumi che $f/v \gg R_0 C$, ma d/v e $R_0 C$ siano dello stesso ordine di grandezza. Esprimi la tua risposta in termini della costante β della parte B e altre quantità note. **1.7pt**
- E.2** Vedrai che il risultato per f è simile a quello ottenuto nella parte C, mentre la quantità q è sostituita da q_{eff} . Trova l'espressione di q_{eff} in funzione delle quantità date nella formulazione del problema. **0.3pt**