# Fisica planetaria (10 punti)

Questo problema consiste di due problemi indipendenti relativi all'interno dei pianeti. Gli effetti della curvatura della superficie dei pianeti può essere trascurata. Potrebbe essere utile usare la formula

$$(1+x)^{\varepsilon} \approx 1+\varepsilon x, \text{ quando } |x| \ll 1. \quad (1)$$

## Parte A. Dorsale oceanica (5.0 punti)

Consideriamo un grande recipiente d'acqua situato in un campo gravitazionale uniforme con accelerazione di caduta libera $g$. Due piastre rettangolari verticali parallele l'una all'altra sono montate nel recipiente in modo che i bordi verticali delle piastre siano a stretto contatto senza spazi con le pareti verticali del recipiente. Un tratto di lunghezza $h$ di ogni piastra è immerso in acqua (Fig. 1). La larghezza delle piastre lungo l'asse *y* è $w$, la densità dell'acqua è $\rho_0$.

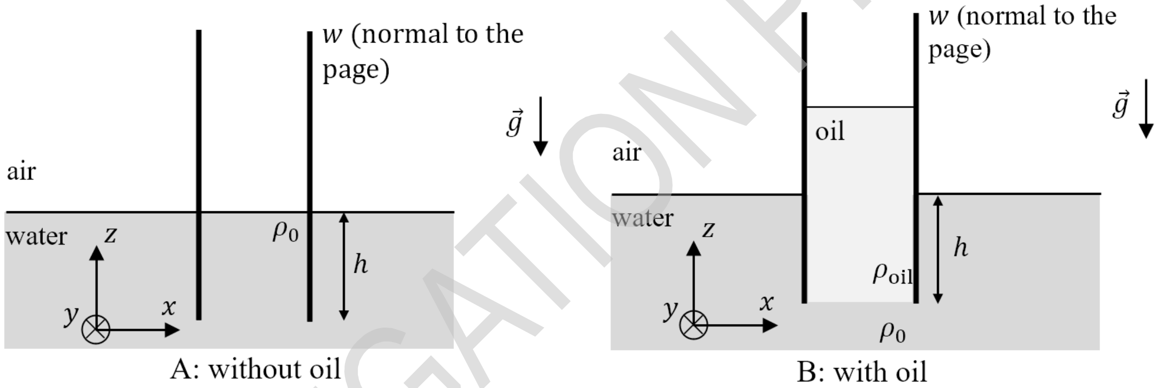


Figura 1. Piastre parallele in acqua.

Olio di densità $\rho_{\text{oil}}$ ($\rho_{\text{oil}} < \rho_0$) viene versato nello spazio tra le piastre fino a quando il livello inferiore dell'olio ha raggiunto i bordi inferiori delle piastre. Supponiamo che le piastre e i bordi del recipiente siano abbastanza alti da non far traboccare l'olio. La tensione superficiale e la miscelazione dei fluidi possono essere trascurate.

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | Qual è la componente $x$ della forza totale $F_x$ che agisce sulla piastra destra (intensità e direzione)? | 0.8pt |

La Fig. 2 mostra una sezione trasversale di una dorsale oceanica. Consiste di strati sovrapposti di mantello, crosta e acqua oceanica. Il mantello è composto da rocce che supponiamo possano scorrere in tempi geologici. Perciò in questo problema sarà trattato come un fluido. Lo spessore della crosta è molto più piccolo della lunghezza caratteristica nella direzione *x*, quindi la crosta si comporta come una piastra liberamente pieghevole. Una tale dorsale può essere modellata con alta precisione come un sistema bidimensionale, senza alcuna variazione delle quantità lungo l'asse $y$, che è perpendicolare al piano di Fig. 2. Assumiamo che la lunghezza $L$ della dorsale lungo l'asse $y$ sia molto più grande di qualsiasi altra lunghezza introdotta in questo problema.

Al centro della dorsale si assume che lo spessore della crosta sia nullo. La crosta si fa più spessa al crescere della distanza orizzontale $x$ dal centro e si avvicina ad uno spessore costante $D$ quando $x \to \infty$. Di conseguenza, il fondale oceanico si abbassa di un'altezza verticale $h$ sotto la sommità della dorsale O, che definiamo come l'origine del nostro sistema di coordinate (vedi Fig. 2). La densità dell'acqua $\rho_0$

e la sua temperatura $T_0$ possono essere assunte uniformi nello spazio e costanti nel tempo. La stessa assunzione può essere fatta per la densità del mantello $\rho_1$ e la sua temperatura $T_1$. Anche la temperatura della crosta $T$ è costante nel tempo ma può dipendere dalla posizione.

E' noto che, con elevata precisione, il materiale crostale si espande linearmente con la temperatura $T$. Poiché si presume che le temperature dell'acqua e del mantello siano costanti, è conveniente utilizzare un'espressione adimensionale del coefficiente di espansione termica. Pertanto $l(T) = l_1 \left[1 - k_l(T_1 - T)\,/(T_1 - T_0)\right]$, dove $l$ è la lunghezza di un tratto del materiale della crosta, $l_1$ è la sua lunghezza alla temperatura $T_1$, e $k_l$ è il coefficiente di espansione termico adimensionale, che può essere assunto come costante.

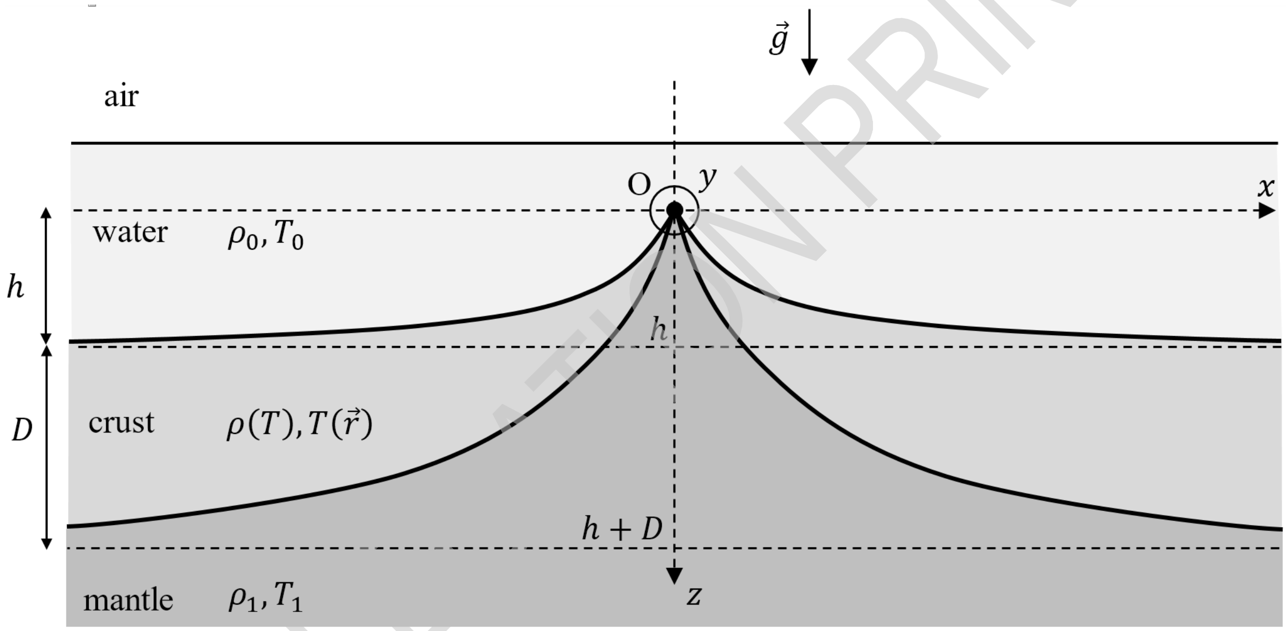


Figura 2. Dorsale oceanica. Notare che l'asse $z$ punta verso il basso



| | | |
|---|---|---|
| **A.2** | Assumendo che la crosta sia isotropica, trovare come la sua densità $\rho$ dipende dalla sua temperatura $T$. Assumendo che $\lvert k_l\rvert \ll 1$, scrivere la risposta nella forma appropriata $$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right], \qquad (2)$$ dove i termini dell'ordine $k_l^2$ e superiori sono trascurati. Successivamente, identificare la costante $k$. | 0.6pt |

E' noto che $k > 0$. Inoltre, la conducibilità termica $\kappa$ della crosta può essere assunta come costante. Di conseguenza, molto lontano dall'asse della dorsale la temperatura della crosta dipende linearmente con la profondità.

| | | |
|---|---|---|
| **A.3** | Assumendo che il mantello e l'acqua si comportino come un fluido incomprimibile in equilibrio idrostatico, esprimere lo spessore della crosta a grande distanza $D$ in funzione di $h$, $\rho_0$, $\rho_1$ e $k$. Qualsiasi movimento del materiale può essere trascurato. | 1.1pt |

| | | |
|---|---|---|
| **A.4** | Trova, al prim'ordine in $k$, la forza orizzontale totale $F$ che agisce sulla metà destra ($x > 0$) della crosta in funzione di $\rho_0$, $\rho_1$, $h$, $L$, $k$ e $g$. | 1.6pt |

Supponiamo che la crosta sia isolata termicamente dal resto della Terra. Come risultato della conduzione del calore, le temperature delle superfici superiore e inferiore della crosta si avvicineranno l'una all'altra fino a quando la crosta raggiungerà l'equilibrio termico. Il calore specifico della crosta è $c$ e si può ritenere costante.

| | | |
|---|---|---|
| **A.5** | Utilizzando l'analisi dimensionale o l'ordine di grandezza, stimare il tempo caratteristico $\tau$ in cui la differenza tra la temperatura superficiale superiore e quella inferiore della crosta lontana dall'asse della dorsale diminuirà approssimativamente a zero. Puoi presumere che $\tau$ non dipende dalle due temperature superficiali iniziali della crosta. | 0.9pt |



## Parte B. Onde sismiche in un mezzo stratificato (5.0 punti)

Supponiamo che si verifichi un breve terremoto sulla superficie di un pianeta. Si può ipotizzare che le onde sismiche provengano da una sorgente lineare situata a $z = x = 0$, dove $x$ è la coordinata orizzontale e $z$ è la profondità sotto la superficie (Fig. 3). Si può presumere che la sorgente dell'onda sismica sia molto più lunga di qualsiasi altra lunghezza considerata in questa domanda.

A seguito del terremoto, viene emesso un flusso uniforme delle cosiddette onde longitudinali P lungo tutte le direzioni nel piano $x$-$z$ che ha componente positiva lungo l'asse $z$. Poiché la teoria delle onde in un solido è generalmente complicata, in questo problema trascuriamo tutte le altre onde emesse dal terremoto. La crosta del pianeta è stratificata in modo che il modulo della velocità $v$ dell'onda P dipende dalla profondità $z$ secondo la formula $v = v_0(1+z/z_0)$, dove $v_0$ è la velocità in superficie e $z_0$ è una costante positiva nota.

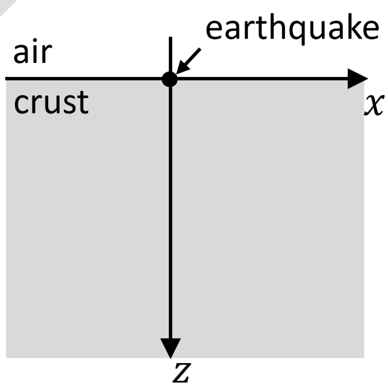


Figura 3. Sistema di coordinate utilizzato nella parte B.

| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | Consideriamo un singolo raggio emesso dal terremoto che forma un angolo iniziale $0 < \theta_0 < \pi/2$ con l'asse $z$ e si muove nel piano $x$-$z$. Qual è la coordinata orizzontale $x_1(\theta_0) \neq 0$ alla quale questo raggio può essere individuato sulla superficie del pianeta? E' noto che il percorso del raggio è un arco di circonferenza. Scrivere la risposta nella forma $x_1(\theta_0) = A\cot(b\theta_0)$, dove $A$ e $b$ sono costanti che devono essere determinate. | 1.5pt |

Se non sei riuscito a trovare $A$ e $b$, nelle domande successive puoi usare il risultato $x_1(\theta_0) = A\cot(b\theta_0)$ come fornito. Supponiamo che l'energia totale, per unità di lunghezza della sorgente, rilasciata come onde P nella crosta durante il terremoto sia $E$. Supponiamo che le onde siano completamente assorbite quando raggiungono la superficie del pianeta provenendo dal basso.

| | | |
|---|---|---|
| **B.2** | Trova come la densità di energia per unità di area $\varepsilon(x)$ assorbita dalla superficie dipende dalla distanza lungo la superficie $x$. Disegna l'andamento di $\varepsilon(x)$. | 1.5pt |

D'ora in poi, supponiamo che le onde siano invece completamente riflesse quando raggiungono la superficie. Immagina un dispositivo posizionato a $z = x = 0$ che ha la stessa geometria della sorgente sismica considerata in precedenza. Il dispositivo è in grado di emettere onde P in una distribuzione angolare liberamente scelta. Facciamo in modo che il dispositivo emetta un segnale con una gamma ristretta di angoli di emissione. In particolare, l'angolo iniziale che il segnale forma con la verticale appartiene all'intervallo $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, dove $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ e $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

| | | |
|---|---|---|
| **B.3** | A quale distanza $x_{\text{max}}$ lungo la superficie dalla sorgente si trova il punto più lontano che non viene raggiunto dal segnale? Scrivere la risposta in funzione di $\theta_0$, $\delta\theta_0$ e delle altri costanti fornite sopra. | 2.0pt |