Motore termoacustico

Un motore termoacustico è un dispositivo che converte il calore in energia acustica, o onde sonore - una forma di energia meccanica. Come molte altre macchine termiche, il motore termoacustico, invertendo il ciclo, può essere usato come frigorifero, utilizzando il suono per trasferire calore da una sorgente fredda a una calda. Le alte frequenze a cui opera il motore termoacustico riducono la conduzione di calore ed eliminano la necessità del confinamento in ambienti di lavoro. A differenza di molti altri tipi di motore, il motore termoacustico non ha parti in movimento eccetto il fluido stesso.

L'efficienza delle macchine termoacustiche è tipicamente minore di quella di altri tipi di macchine, ma ha vantaggi di messa a punto e di costi di manutenzione. Questo crea opportunità per l'applicazione all'utilizzo di fonti rinnovabili, come nelle centrali solari o nello sfruttamento del calore residuo. La nostra analisi si focalizzerà sulla creazione di energia acustica nel sistema, ignorando la conversione in altre forme di energia per muovere dispositivi esterni.

Parte A: Onde sonore in un tubo chiuso (3.7 punti)

Si consideri un tubo termicamente isolante di lunghezza L e sezione S, il cui asse giace nella direzione x. Le due estremità del tubo si trovano a $x = 0$ e a $x = L$. Il tubo è riempito con un gas perfetto ed è chiuso a entrambe le estremità. All'equilibrio, il gas ha temperatura T_0, pressione p_0 e densità di massa ρ_0. Si assuma che la viscosità possa essere trascurata e che il moto del gas sia solo nella direzione x. Le proprietà del gas sono uniformi nelle direzioni perpendicolari y e z.

Figura 1

A.1 Quando si forma un'onda sonora stazionaria, gli elementi di gas oscillano nella direzione x con pulsazione ω. L'ampiezza delle oscillazioni dipende dalla posizione di equilibrio x di ogni elemento di gas lungo il tubo. Lo spostamento longitudinale di ogni elemento di gas dalla sua posizione di equilibrio x è dato da **0.3pt**

$$u(x,t) = a\sin(kx)\cos(\omega t) = u_1(x)\cos(\omega t) \tag{1}$$

(notare che qui la variabile u descrive lo spostamento di un elemento di gas)

dove $a \ll L$ è una costante positiva, $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda e λ è la lunghezza d'onda. Qual è la massima lunghezza d'onda possibile $\lambda_{\max}$ in questo sistema?

Si assuma in tutto il problema un modo di oscillazione con $\lambda = \lambda_{\max}$.

Ora si consideri una sottile porzione di gas, situata a riposo tra x e $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). Per effetto dell'onda longitudinale della domanda A.1, la porzione oscilla lungo l'asse x e subisce un cambiamento di volume e di altre proprietà termodinamiche.

Nei prossimi quesiti si assuma che tutti questi cambiamenti delle proprietà termodinamiche siano piccoli rispetto ai valori non perturbati delle quantità stesse.

A.2 Il volume $V(x,t)$ della porzione oscilla intorno al valore di equilibrio $V_0 = S\Delta x$ e si può esprimere come **0.5pt**

$$V(x,t) = V_0 + V_1(x)\cos(\omega t). \tag{2}$$

Si calcoli un'espressione di $V_1(x)$ in funzione di V_0, a, k e x.

A.3 Si assuma che la pressione totale del gas, per effetto dell'onda sonora, si esprima nella forma approssimata **0.7pt**

$$p(x,t) = p_0 - p_1(x)\cos(\omega t). \tag{3}$$

Considerando le forze agenti sulla porzione di gas, si calcoli l'ampiezza $p_1(x)$ dell'oscillazione di pressione al primo ordine. Si esprima il risultato in funzione della posizione x, della densità di equilibrio ρ_0, dell'ampiezza a dello spostamento e dei parametri dell'onda k e ω.

Alle frequenze acustiche, la conduttività termica del gas può essere trascurata. Si tratti l'espansione e contrazione delle porzioni di gas come puramente adiabatica, che soddisfa la relazione $pV^\gamma = \text{const}$, dove γ è la costante adiabatica.

A.4 Si utilizzino la relazione data e i risultati delle domande precedenti per calcolare un'espressione della velocità del suono $c = \omega/k$ nel tubo, approssimando al prim'ordine. Esprimere la risposta in funzione di p_0, ρ_0 e della costante adiabatica γ. **0.3pt**

A.5 La variazione di temperatura del gas dovuta all'espansione e alla contrazione adiabatica causata dall'onda sonora assume la forma: **0.7pt**

$$T(x,t) = T_0 - T_1(x)\cos(\omega t). \tag{4}$$

Calcolare l'ampiezza $T_1(x)$ delle oscillazioni di temperatura in funzione di T_0, γ, a, k e x.

A.6 Solo in questa domanda, si assuma una debole interazione termica tra il tubo e il gas. Come conseguenza, l'onda sonora stazionaria rimane con buona approssimazione invariata, ma il gas può scambiare piccole quantità di calore con il tubo. Il riscaldamento dovuto alla viscosità è trascurabile. **1.2pt**
Per ognuno dei punti in figura 2 (A, C alle estremità del tubo, B al centro) stabilire se la temperatura del tubo in quel punto aumenterà, diminuirà o rimarrà la stessa dopo un lungo tempo.

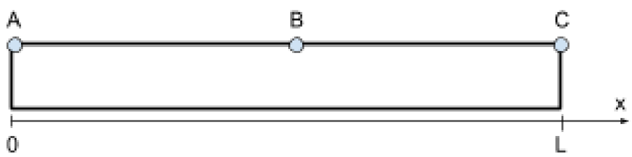

Figura 2

Parte B: Amplificazione di onde sonore indotta da un contatto termico esterno (6.3 punti)

Una pila di lamine sottili e ben distanziate una dall'altra è inserita nel tubo. Le lamine della pila sono allineate parallelamente all'asse del tubo, così da non ostacolare il flusso del gas lungo il tubo. Il centro della pila è posizionato a $x_0 = L/4$. La pila ha una larghezza $\ell \ll L$ lungo l'asse del tubo, riempiendo tutta la sua sezione trasversale. Gli estremi destro e sinistro della pila sono mantenuti a una differenza di temperatura τ. L'estremo sinistro della pila, a $x_H = x_0 - \ell/2$, è mantenuto da una sorgente termica esterna alla temperatura $T_H = T_0 + \tau/2$. Allo stesso tempo il suo estremo destro, a $x_C = x_0 + \ell/2$, è mantenuto alla temperatura $T_C = T_0 - \tau/2$.

La pila di lamine permette un lieve flusso di calore longitudinale che permette di mantenere un gradiente di temperatura costante tra i suoi estremi, tale che $T_{\text{piatto}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$.

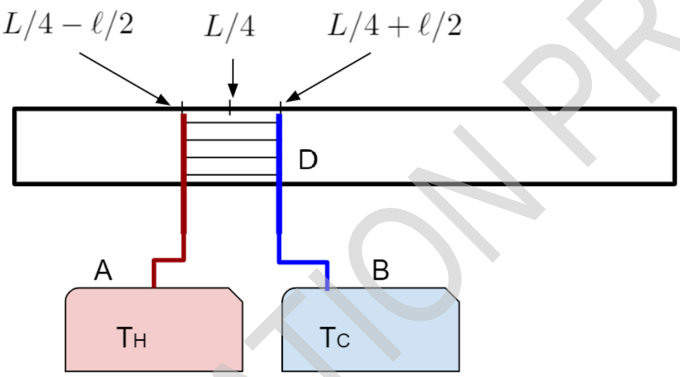

Figura 3. Rappresentazione del sistema. (A) e (B) sono rispettivamente la sorgente calda e la sorgente fredda. (D) rappresenta la pila.

Per analizzare l'effetto del contatto termico tra la pila di lamine e il gas sulle onde sonore nel tubo, si facciano le seguenti assunzioni:

- Come nella parte precedente, tutte le variazioni delle proprietà termodinamiche sono piccole rispetto ai valori imperturbati.
- Il sistema opera nello stato fondamentale di onda stazionaria con la massima lunghezza d'onda possibile. L'onda è modificata in modo trascurabile dalla presenza della pila di lamine.
- La pila è molto più corta della lunghezza d'onda $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, e può essere posizionata sufficientemente lontana dai punti nodali dello spostamento e della pressione, in modo che lo spostamento $u(x,t) \approx u(x_0,t)$ e la pressione $p(x,t) \approx p(x_0,t)$ possono essere considerati uniformi lungo l'intera lunghezza della pila.
- Si possono trascurate tutti gli effetti di bordo, dovuti alle porzioni di gas che entrano ed escono dalla pila.
- La differenza di temperatura tra le estremità della pila, cioè tra le sorgenti calda e fredda, è piccola rispetto alla temperatura assoluta: $\tau \ll T_0$.
- La conduzione di calore attraverso la pila, attraverso il gas e lungo il tubo sono trascurabili. Le uniche cause significative di trasferimento di calore sono la convezione dovuta al moto del gas e la conduzione tra il gas e la pila.

B.1 Si consideri una specifica porzione di gas nella regione della pila, originariamente a $x_0 = L/4$. Mentre la porzione si muove dentro la pila, la temperatura locale della parte di pila attraversata varia come segue: **0.4pt**

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \tag{5}$$

Si esprima T_{st} in funzione di a, τ e ℓ.

B.2 Al di sopra di quale differenza critica di temperatura τ_{cr} il gas trasporterà calore dalla sorgente calda alla sorgente fredda? Esprimere τ_{cr} in funzione di T_0, γ, k e ℓ. **1.0pt**

B.3 Ricavare l'espressione generale approssimata del flusso di calore $\frac{dQ}{dt}$ entrante in una piccola porzione di gas come funzione lineare delle velocità di cambiamento del suo volume e della sua pressione. Esprimere la risposta in funzione della velocità di cambiamento del volume $\frac{dV}{dt}$, della velocità di cambiamento della pressione $\frac{dp}{dt}$, dei valori di equilibrio della pressione e del volume della porzione p_0 ,V_0 e della costante adiabatica γ. (Si può usare l'espressione del calore specifico molare a volume costante $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$, dove R è la costante dei gas). **0.8pt**

Il limitato flusso di calore tra la porzione di gas e la pila causa una differenza di fase tra le oscillazioni di pressione e di volume della porzione. Si vuole vedere come questo generi lavoro.

Il flusso di calore entrante nella porzione di gas dalla pila è proporzionale alla differenza di temperatura tra la porzione e gli elementi vicini della pila, ed è data approssimativamente da $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1)\cos(\omega t)$. Qui T_1 e T_{st} sono le ampiezze di oscillazione della temperatura della porzione di gas e degli elementi vicini della pila (si vedano le domane A.5 e B.1 rispettivamente) e $\beta > 0$ è una costante. Si assuma che, alle frequenze operative della macchina, la variazione di temperatura del gas risultante da questo flusso di calore sia trascurabile rispetto a T_1 e T_{st}.

B.4 Per calcolare il lavoro si considera una variazione del volume della porzione che si muove dovuta al contatto termico con la pila. La pressione e il volume della porzione di gas sotto l'influenza della pila possono essere scritte nella forma: **1.9pt**

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{6}$$

Date p_a e p_b, trovare i coefficienti V_a e V_b. Esprimere la risposta in termini di p_a, p_b, p_0, V_0, γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a e ℓ.

B.5 Si trovi un'espressione approssimata del lavoro acustico per unità di volume w prodotto dalla porzione di gas in un ciclo. Integrare sul volume della pila per ottenere il lavoro totale W_{tot} prodotto dal gas in un ciclo. Esprimere W_{tot} in funzione di γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a, k e S. **0.8pt**

B.6	Si trovi un'espressione approssimata del calore Q_{tot} trasportato dal lato sinistro del piano $x = x_0$ al lato destro, in un ciclo. Esprimere la risposta in funzione di τ, τ_{cr}, β, ω, a, S e ℓ. (Suggerimento: si può usare la formula $j = Q\frac{du}{dt}$ per la corrente di calore dovuta alla convezione).	0.8pt

B.7	Si trovi il rendimento η del motore termoacustico. Il rendimento è definito come il rapporto tra il lavoro acustico generato e il calore assorbito dalla sorgente calda. Si esprima la risposta in funzione della differenza di temperatura τ tra le sorgenti calda e fredda, della differenza critica di temperatura τ_{cr} e del rendimento di Carnot $\eta_c = 1 - T_C/T_H$.	0.6pt