Molle a lunghezza zero e molle slinky

Una molla a lunghezza efficace zero (ZLS) è una molla per cui la forza è proporzionale alla lunghezza della molla stessa, cioè $F = kL$ se $L > L_0$, dove L_0 è la lunghezza minima della molla o, anche, la sua lunghezza quando non è allungata. La figura 1 mostra la relazione tra la forza F e la lunghezza della molla L per una ZLS. La pendenza della retta è la costante k della molla.

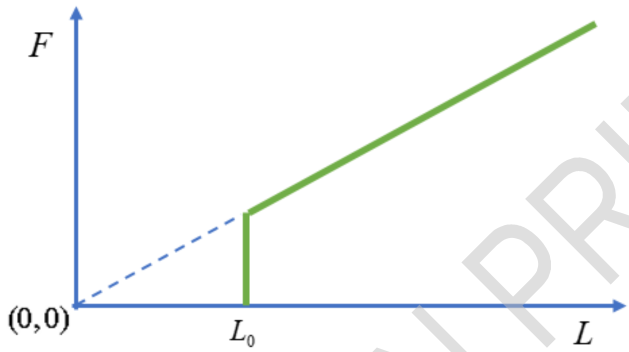

Figura 1: relazione tra la forza F e la lunghezza L della molla

Si può usare una ZLS in sismografia perché consente una misurazione molto accurata delle variazioni dell'accelerazione gravitazionale g. In questo problema, considereremo una ZLS omogenea, il cui peso Mg supera kL_0. Si definisce il rapporto adimensionale $\alpha = kL_0/Mg < 1$, per caratterizzare quanto la molla è "tenera" (una molla è dura, generalmente, se ha una costante elastica grande). Il giocattolo conosciuto come molla "slinky" può essere (ma non necessariamente) considerato un esempio per una ZLS.

Parte A: Statica (3.0 punti)

A.1	Considerare un segmento di lunghezza $\Delta\ell$ di una molla ZLS, inizialmente non allungata. Essa, poi, viene tirata da una forza F , ignorando la gravità. Qual è la lunghezza Δy di questo segmento in funzione di $F, \Delta\ell$ e dei parametri della molla?	0.5pt

A.2	Calcolare il lavoro ΔW richiesto per allungare un segmento di molla dalla sua lunghezza originaria $\Delta\ell$ fino alla lunghezza Δy.	0.5pt

In questa domanda, si identifica un anello particolare della molla con la coordinata ℓ che rappresenta la distanza dell'anello dal fondo della molla stessa quando non viene stirata con $0 \le \ell \le L_0$. Si ricordi, in particolare, che la coordinata ℓ rimane commovente per la spira anche quando viene allungata. In parole povere ℓ rappresenta la coordinata di un anello qualsiasi della molla, sia quando si trova in posizione di riposo sia quando viene allungata dalla forza F.

A.3	Si supponga, ora, di appendere la molla alla sua estremità superiore, in modo che si allunghi sotto il suo stesso peso. Qual è la lunghezza totale H della molla sospesa quando si trova in equilibrio? Esprimi le risposte in termini di L_0 e α.	2.0pt

Parte B: Dinamica (5.5 punti)

Gli esperimenti mostrano che quando la molla viene appesa, mantenuta ferma in equilibrio e poi rilasciata, si contrae gradualmente dall'alto, mentre la parte inferiore continua a rimanere ferma (vedere la Figura 2). Con il passare del tempo la parte, che si contrae, cade come un pezzo solido e nella caduta cattura altri anelli della molla, mentre la parte immobile diventa via via più corta. Ogni anello successivo della molla inizia a muoversi solo quando la parte in caduta lo raggiunge. L'estremità inferiore della molla inizia a muoversi solo quando tutta la molla è completamente caduta e ha raggiunto la sua lunghezza minima L_0, quella che aveva quando non era stata ancora stirata. Dopo di ciò, la molla contratta continua a cadere, senza ruotare, come un corpo rigido che trasla sotto l'azione della gravità.

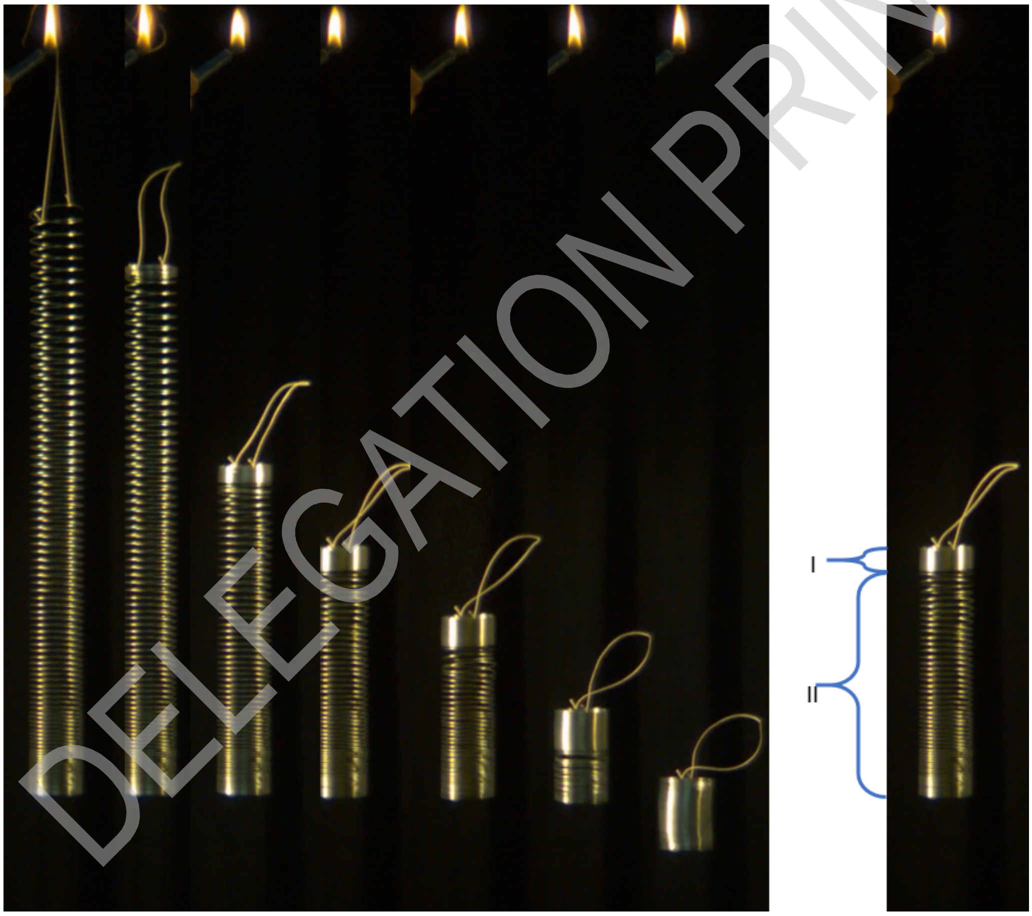

Figura 2: a sinistra una sequenza di foto scattate durante la caduta libera di una slinky; a destra: la parte mobile, I, e la parte stazionaria, II, durante la caduta libera della molla.

Nel resto del problema, si richiede di fondare la soluzione sul modello descritto fin qui. Si può trascurare la resistenza dell'aria, ma non si può trascurare L_0.

B.1	Calcolare il tempo t_c trascorso dal momento in cui la molla viene lasciata andare, fino a quando è collassata completamente alla sua lunghezza minima L_0. Esprimere la risposta in termini di L_0, g e α. Calcolare il valore numerico di t_c per una molla con $k = 1.02\ \mathrm{N/m}$, $L_0 = 0.055\,\mathrm{m}$ ed $M = 0.201\ \mathrm{kg}$, mentre per g si assuma $9.80\ \mathrm{m/s^2}$.	2.5pt

B.2	Per risolvere questo punto si usa la coordinata ℓ per indicare il bordo tra le parti I e II (in figura 2 la parte I è quella in movimento e la parte II quella ferma). Ad un certo momento, mentre una parte stazionaria esiste ancora, la sua massa è $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0}M$, e la parte in moto si muove con velocità istantanea $v_I(\ell)$. Far vedere che, in questo istante (mentre esiste ancora una parte della molla che è stazionaria), la velocità della parte di molla in movimento è $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Esprimere le costanti A e B in termini di L_0, g e α.	2.5pt

B.3	Basando il calcolo su B.2, trovare la velocità minima v_{min} della parte mobile della molla che si muove, dopo il suo rilascio e prima che colpisca il suolo. Esprimere la risposta in termini di L_0, α, A e B.	0.5pt

Parte C: Bilancio energetico (1.5 punti)

C.1	Calcolare quanta energia meccanica Q è stata trasformata in calore, dal momento in cui la molla viene rilasciata fino all'attimo prima che la molla colpisca il suolo. Esprimere la risposta in termini di L_0, M, g e α.	1.5pt