Viscoleasticità di un filo di polimero (10 punti)

Attenzione: Il filo non deve essere stirato prima dell'inizio dell'esperimento!
Accendi subito la bilancia (il tempo di riscaldamento è circa 10 minuti). Non cambiare il settaggio della bilancia.

Introduzione

Quando un materiale solido è sottoposto a una forza esterna si deforma. Per forze di piccola intensità la deformazione è proporzionale alla forza (legge di Hooke) ed è reversibile, dunque il materiale ritorna alla sua forma originaria se si rimuove la forza.

Per un solido, conviene descrivere il fenomeno usando i concetti di sforzo e deformazione. Lo sforzo σ è definito come il rapporto tra la forza F e la superficie S su cui agisce, mentre la deformazione ϵ è la variazione relativa di lunghezza:

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad \text{e} \qquad \epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad , \tag{1}$$

dove ℓ e ℓ_0 sono rispettivamente la lunghezza finale e iniziale. Nel range di elasticità, lo sforzo è semplicemente proporzionale alla deformazione: $\sigma = E\,\epsilon$ (legge di Hooke) e il fattore di proporzionalità, E, prende il nome di *modulo di Young*.

Il comportamento elastico descritto dalla legge di Hooke è un'approssimazione valida solo per deformazioni sufficientemente piccole. Per deformazioni più grandi le variazioni diventano gradualmente irreversibili e si entra nella zona di plasticità, nella quale i movimenti molecolari cominciano a non essere più vincolati, in maniera simile a quanto accade in un fluido viscoso. In altre parole, sia nel caso di stiramento sia in quello di compressione, oltre il limite di elasticità il materiale diventa asintoticamente fluido.

Materiali viscoelastici

Alcuni materiali combinano aspetti di un solido elastico e caratteristiche simili a quelle dei fluidi viscosi, e sono perciò chiamati *viscoelastici*.

Nei materiali viscoelastici è dunque ragionevole considerare separatamente il comportamento puramente elastico e il comportamento aggiuntivo viscoso; questo implica che lo sforzo totale σ necessario per produrre una data deformazione ϵ è la somma di un termine puramente elastico $\sigma_0 = E_0\,\epsilon_0$ e di un termine viscoelastico σ_1:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \tag{2}$$

Entrambi i termini dello sforzo corrispondono alla stessa deformazione $(\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1)$. Però la deformazione ϵ_1 corrispondente al termine viscoelastico viene di solito modellizzata come la somma di una deformazione puramente elastica, $\epsilon_1^{\mathsf{e}} = \sigma_1/E_1$, e di una puramente viscosa, ϵ_1^{v} (entrambe soggette allo stesso sforzo $\sigma_1 = \sigma_1^{\mathsf{e}} = \sigma_1^{\mathsf{v}}$):

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^{\mathsf{e}} + \epsilon_1^{\mathsf{v}} \tag{3}$$

Nel processo puramente viscoso, si assume una relazione lineare tra lo sforzo e la derivata della deformazione rispetto al tempo (analogamente a quanto vale nei fluidi viscosi):

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{\mathrm{d}\epsilon_1^{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t},$$

dove η_1 è il coefficiente di viscosità.

Questo modello fenomenologico è il cosiddetto *modello lineare standard per i solidi*, ed è illustrato nella Figura 1: le molle rappresentano i componenti puramente elastici e la tazza il componente puramente viscoso.

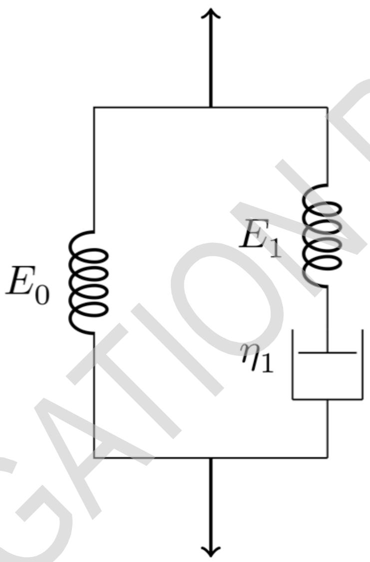

Figura 1. Modello lineare standard per la viscoelasticità lineare dei solidi.

Dalle equazioni precedenti si ottiene la relazione seguente:

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E_1}\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \tag{4}$$

Pertanto, nel modello lineare standard per la viscoelasticità dei solidi, è possibile dimostrare che

$$\sigma = E_0\,\epsilon + \tau_1(E_0 + E_1)\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \tau_1\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

dove $\tau_1 = \eta_1/E_1$. Questa equazione differenziale mostra che la relazione tra sforzo e deformazione non è lineare, e che la deformazione e lo sforzo sono entrambi, in generale, funzioni del tempo. Per ottenere $\epsilon(t)$ è necessario specificare la funzione $\sigma(t)$ e viceversa.

Ci sono due casi speciali di interesse pratico, in cui o $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t = 0$ o $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = 0$, comunemente noti rispettivamente come *condizione di rilassamento dello sforzo* e *condizione di allungamento lento*. Nella condizione di rilassamento dello sforzo si applica al materiale una deformazione improvvisa ϵ che viene mantenuta costante nel tempo, cosicché $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t = 0$. In questo caso, la funzione $\sigma(t)$ dipende quindi solamente dai parametri viscoelastici del materiale e la soluzione dell'equazione (5) è:

$$\sigma(t) = \epsilon(E_0 + E_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_1}) \tag{6}$$

dove si assume che per $t = 0$ solo i componenti elastici contribuiscano allo sforzo e quindi $\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + E_1)$. Questa soluzione mostra che lo sforzo viscoelastico decade esponenzialmente nel tempo, con una costante di tempo τ_1.

Processi multiviscoelastici

Il modello lineare standard può essere facilmente esteso al caso di molti processi viscoelastici, come suggerisce la Figura 2

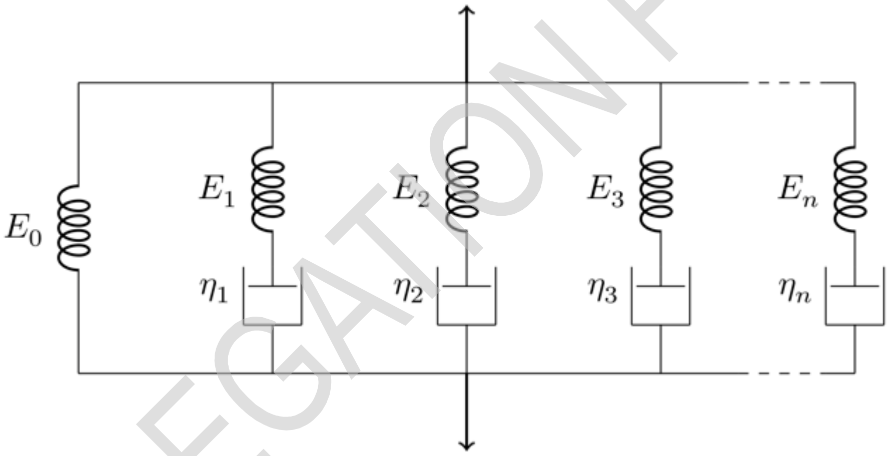

Figura 2. Modello generalizzato per processi multiviscoelastici.

Dunque, considerando N componenti viscoelastici diversi,

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{7}$$

dove $\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E_k}\frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_k}{\eta_k}$ e, come sopra, $\frac{\mathrm{d}\epsilon_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t}$.

L'equazione (5) si può dunque generalizzare in questo modo:

$$\sigma = E_0\epsilon + \eta_t \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \sum_k \tau_k \frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\mathrm{d}t}, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

dove $\eta_t = \sum_k \eta_k$, e $\tau_k = \eta_k/E_k$.

In condizioni di deformazione costante, ciascuno sforzo viscoelastico dovrebbe ancora decadere esponenzialmente nel tempo, $\sigma_k = A_k \mathrm{e}^{-t/\tau_k}$ e si avrebbe quindi la soluzione:

$$\sigma(t) = \epsilon \left(E_0 + \sum_k E_k \mathrm{e}^{-t/\tau_k} \right), \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{9}$$

dove si è assunto che per $t = 0$ solo i componenti elastici contribuiscano allo sforzo totale e dunque $\sigma_0 = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$. La risposta viscoelastica che ne risulta è evidentemente non lineare.

Attrezzatura

Per l'esperimento viene fornita la seguente attrezzatura (Figura 3):

1. 1 piedistallo, con un sistema di sostegno per posizionare un puntatore laser e un altro supporto superiore per tenere verticalmente il filo stirato con una deformazione costante sopra la bilancia;
2. 1 massetta, consistente in un cilindro cavo e una vite per fissare il filo;
3. 1 filo lungo di poliuretano termoplastico (TPU) attaccato alla massetta e a un'altra vite usata per appendere il filo al supporto superiore;
4. 1 filo TPU corto fissato a una vite singola;
5. 1 puntatore laser col relativo supporto;
6. 1 bilancia digitale;
7. 2 specchi piani;
8. 1 cronometro;
9. 1 righello;
10. 1 metro a nastro metallico;
11. 1 foglio di carta A4 da usare come schermo;
12. 1 fermaglio a molla per tenere il laser in posizione e per accenderlo;

Figura 3. Attrezzatura per il problema sperimentale.

Parte A: Misure di rilassamento dello sforzo (1.9 punti)

Attenzione: il filo non deve essere stirato prima dell'inizio dell'esperimento! Se per caso il filo viene inavvertitamente stirato, chiedine un altro, ma tieni presente che questo richiederà un po' di tempo, e di conseguenza avrai meno tempo per il tuo esperimento.
Leggi attentamente le indicazioni date nella "Parte D: Analisi dei dati" prima di iniziare le misure, allo scopo di pianificare il modo in cui condurrai l'esperimento.

A.1	Misura la lunghezza del filo tra le teste delle viti quando esso non è teso. Per ottenere la lunghezza totale del filo ℓ_0, compresa la lunghezza tra le viti, aggiungi 5 mm per ciascuna vite. Scrivi nel foglio risposte il valore che hai misurato per ℓ_0 e la sua incertezza.	0.3pt

A.2	Misura il peso totale della massetta, P_0, in unità grammi-forza (gf). Ricorda che 1 grammo-forza è la forza corrispondente al peso di una massa di 1 grammo ($1\,\mathrm{gf} = 9.80 \times 10^{-3}\,\mathrm{N}$). Scrivi nel foglio risposte il valore misurato, e una stima della sua incertezza.	0.3pt

Per osservare sperimentalmente le varie componenti del rilassamento è necessario misurare lo sforzo per un tempo sufficientemente lungo. In questo caso, è sufficiente campionare l'evoluzione dello sforzo per circa **45 minuti**.

Ora devi effettuare due azioni simultanee: 1 e 2. Leggi attentamente le istruzioni prima di iniziare.
Importante: se per qualunque motivo l'esperimento viene interrotto non può essere ripreso. Bisogna ripartire con un altro filo. In questo caso, chiedine uno.

Effettua simultaneamente queste due azioni:

1. Tenendo la massettina sul piatto della bilancia, tendi il filo sistemando la vite fissata all'estremità sul supporto superiore situato nel piedistallo (Figura 4).
2. Contemporaneamente fai partire il cronometro.

Figura 4. Appendi il filo al supporto e inizia le misure.

A.3	Prendi nota dei valori segnati dalla bilancia, $P(t)$, e i corrispondenti valori del tempo, t, per circa 45 min, nella tabella fornita nel foglio risposte.	1.0pt

A.4	Misura la lunghezza del filo stirato, ℓ, e stima la corrispondente incertezza. Scrivi nel foglio risposte il valore misurato per ℓ e la sua incertezza.	0.3pt

Parte B. Misura del diametro del filo stirato (1.5 punti)

Non guardare mai direttamente il laser! Quando non lo usi, tienilo spento.
Se hai difficoltà ad ottenere una figura di diffrazione, chiedi un nuovo laser.

In questa parte userai la diffrazione della luce per misurare il diametro del filo di polimero. Il diametro nominale del filo non teso è 0.5 mm. Come forse sai, la figura di diffrazione di una fenditura rettangolare di larghezza d è simile a quella di un oggetto cilindrico con lo stesso diametro d della fenditura. Nella regione lontana (zona di Fraunhofer), se si osserva la figura di diffrazione su uno schermo posto a una distanza molto maggiore del diametro dell'oggetto, la distanza tra i minimi di diffrazione a piccoli angoli è la stessa per la fenditura e per l'oggetto cilindrico, ed è data da:

$$d \sin\theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{10}$$

dove θ è l'angolo di diffrazione.

La lunghezza d'onda della luce del laser che usi è $\lambda = 650 \pm 10$ nm.

Per svolgere questa parte, procedi in questo modo:

1. Accendi il laser usando il fermaglio a molla (Figura 5)
2. Posiziona il laser in modo che la luce colpisca direttamente il filo stirato.

3. Con l'attrezzatura fornita, trova il modo di proiettare la figura di diffrazione su uno schermo di carta e di misurare i dati necessari per determinare il diametro del filo usando l'equazione (10).

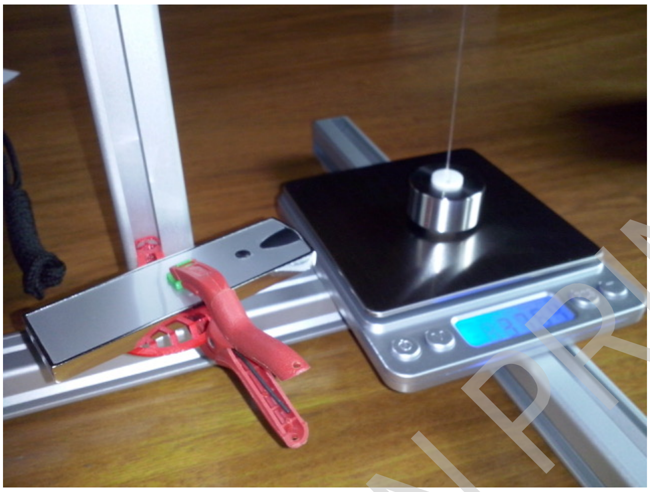

Figura 5: Accendi il laser usando il fermaglio a molla.

B.1	Sul foglio risposte fai uno schizzo del metodo che hai usato.	0.6pt

B.2	Misura la distanza ottica, D, tra il filo e la figura di diffrazione proiettata. Scrivi il valore nel foglio risposte, con una stima della sua incertezza.	0.3pt

B.3	Determina la distanza media tra i minimi, $\bar{x}$, e la sua incertezza. Scrivila nel foglio risposte con una stima della sua incertezza.	0.3pt

B.4	Applicando l'equazione (10) ai tuoi dati, determina il diametro del filo polimerico stirato, d , e la sua incertezza. Scrivili nel foglio risposte.	0.3pt

Parte C: Misure con un altro filo (0.3 punti)

Prima di iniziare con l'analisi dei dati (**Parte D**) devi preparare l'apparecchiatura per la misura con il filo più corto (**Parte E**).

Stacca la massetta dal filo lungo (svitandola) e trasferiscila all'estremità libera del filo più corto (inserendo il filo attraverso il foro e fissandolo con la filettatura, vedere Figura 6).

Se non riesci a inserire il filo attraverso il foro, chiedi aiuto.

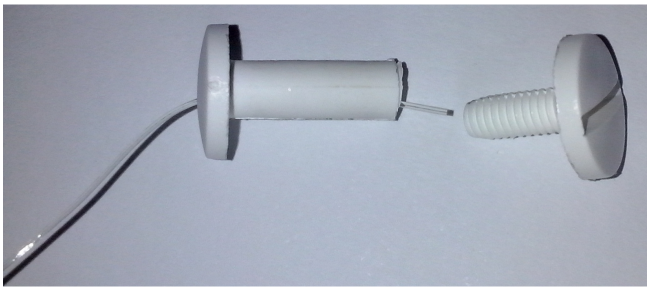

Figura 6. Montaggio del filo TPU sulla vite di fissaggio.

C.1	Misura la lunghezza, ℓ_0' del filo come in **A.1**. Scrivilo nel foglio delle risposte con una stima della sua incertezza.	0.3pt

Appendi questo nuovo filo sul supporto superiore in modo che la massa eserciti uno sforzo costante. Il filo raggiungerà infine la deformazione stazionaria $\epsilon = \sigma/E$, mentre si esegue l'analisi dei dati (**la massa dovrebbe rimanere sospesa per almeno 30 minuti**).

Parte D: Analisi dei dati (5.7 punti)

N.B.: l'accelerazione di gravità a Lisbona è $g = 9.80\ \mathrm{ms}^{-2}$.

D.1	Calcola la forza, F, che agisce sul filo in gf per tutti i dati e riempi la colonna corrispondente nella tabella della domanda **A.3**.	0.3pt

D.2	Traccia il grafico di $F(t)$ sulla carta millimetrata nel foglio risposte.	0.4pt

Poiché la piattaforma della bilancia non si muove, le misure possono essere considerate a sforzo costante e può essere utilizzata l'eq. (9) . Il rapporto $\frac{\sigma}{\epsilon}$ può essere scritto come $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$, dove β è una costante. Perciò,

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_1} + E_2 \mathrm{e}^{-t/\tau_2} + E_3 \mathrm{e}^{-t/\tau_3} + \ldots \tag{11}$$

dove la somma è stata ordinata $(\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \ldots)$ per comodità..

D.3	Determina il valore costante della deformazione, ϵ, e la corrispondente incertezza. Scrivile sul foglio risposte.	0.3pt

D.4	Calcola il fattore β, dove σ è espresso in unità del SI ed F è espressa in gf. Scrivilo nel foglio risposte (non è richiesta l'incertezza di misura).	0.3pt

D.5	Guarda i dati nel grafico tracciato per la risposta **D.2**: essi non si possono spiegare solo in base ad un processo puramente elastico. Disegna qualitativamente, sulla carta millimetrata fornita nel foglio risposte, che cosa ti aspetteresti per $F(t)$ nel caso di un processo puramente elastico.	0.4pt

L'analisi dei dati è più facile se consideriamo $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ invece di $F(t)$. Ciò significa che i parametri di rilassamento si possono, dunque, ricavare, lavorando in fasi successive. Per fare ciò, si deve calcolare in ogni punto la derivata rispetto al tempo $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$. Ciò si può fare sia graficamente che numericamente. Nel caso più semplice in cui i punti dati sono presi a intervalli uguali, il valore numerico della derivata di una funzione $f(t)$ nei punti t_i, per un insieme di punti sperimentali $(t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), \cdots$, è dato approssimativamente da

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad i = 2, \cdots, N-1 \tag{12}$$

dove h è la distanza (costante) fra i punti ed N è il numero di punti.

Se gli intervalli tra i dati non sono uguali, il valore numerico della derivata è approssimativamente dato da:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_i = \frac{h_-^2 f_{i+1} - h_+^2 f_{i-1} + (h_+^2 - h_-^2) f_i}{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2} \qquad i = 2, \cdots, N-1 \tag{13}$$

dove $h_+ = (t_{i+1} - t_i)$, $h_- = (t_i - t_{i-1})$ ed ***N*** è il numero dei punti rilevati. Questa espressione rappresenta la derivata media sinistra e destra, pesata con l'inverso dell'intervallo di tempo.

Per analizzare i dati ed ricavare i parametri rilevanti, è necessario eseguire alcuni passaggi. Quindi, partendo dalla somma ordinata nell'equazione (11), devi fare quanto segue:

D.6	Assumi che l'insieme dei dati superi il parametro τ_2 e calcola la derivata, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$, per i punti agli istanti $t > 1000$ s. Registra i valori nella tabella della domanda **A.3**. Nel caso in cui si utilizzi un metodo grafico per il calcolo $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$, utilizzare la carta millimetrata nel foglio risposte.	0.5pt
D.7	Scrivi, nel foglio delle risposte, un'espressione per la dipendenza temporale prevista di $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ nel caso di un solo processo viscoelastico.	0.3pt
D.8	Ricava, utilizzando un metodo grafico, i parametri E_1 e τ_1 nelle unità di misura del SI dai punti della domanda **D.6**. Scrivi E_1 e τ_1 nel foglio risposte (non sono richieste le incertezze di misura).	1.0pt
D.9	Ricava il parametro E_0 nelle unità di misura del SI dai punti della domanda **D.6**. Scrivilo nel foglio risposte (non sono richieste le incertezze di misura).	0.3pt
D.10	Riempi la colonna $y(t)$ nella tabella della domanda **A.3**. sottraendo la componente elastica e quella viscoelastica più lunga da $F(t)$ (i punti usati nella ripsta **D.6** non si devono considerare qui).	0.3pt
D.11	Ricava da $y(t)$ (vedi la **D.10**), usando un metodo grafico, i parametri per la seconda componente viscoleastica, E_2 e τ_2, nelle unità del SI. Scrivi E_2 e τ_2 nel foglio risposte (non sono richieste le incertezze di misura).	1.0pt

Ulteriori componenti viscoelastiche possono essere ricavate in modo analogo.

D.12	Identifica l'intervallo di tempo $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$ in cui vale la terza componente. Scrivi t_i e t_f nel foglio risposte (non sono richieste le incertezze di misura).	0.3pt

D.13	Stima τ_3 nelle unità di misura del SI dal grafico della risposta **D.11**. Scrivilo nel foglio risposte (non sono richieste le incertezze di misura).	0.3pt

Parte E: Misura di E in condizioni di sforzo costante (0.6 punti)

Torna al filo più corto che avevi sospeso nella **Parte C**. Assicurati che siano trascorsi almeno 30 minuti da quando il filo è stato sospeso. Ora puoi tranquillamente presumere che questo filo abbia raggiunto il valore stazionario della deformazione $\epsilon = \sigma/E$.

E.1	Determina E direttamente dalla lunghezza del filo stirato. Scrivilo nel foglio risposte, insieme alla differenza relativa tra questo valore e quello E_0 ottenuto nella **parte D** (non è richiesta l'incertezza).	0.6pt