Due problemi di Meccanica (10 punti)

Prima di iniziare questo problema, leggi le istruzioni di carattere generale fornite a parte.

Parte A. Il disco nascosto (3.5 punti)

Si consideri un disco solido di legno di raggio r_1 e spessore h_1. Da qualche parte al suo interno il legno è stato sostituito da un disco di metallo di raggio r_2 e spessore h_2. Il disco di metallo è posizionato in maniera tale che il suo asse di simmetria B è parallelo all'asse di simmetria S del disco di legno, e si trova alla stessa distanza dalle due facce del disco di legno. Sia d la distanza tra S B. La densità del legno è ρ_1, la densità del metallo è $\rho_2 > \rho_1$. La massa complessiva del disco di legno e del disco di metallo al suo interno è M.

In questo problema, il disco si trova su un piano in modo che può liberamente ruotare a destra e a sinistra. In Fig. 1 sono mostrate una vista laterale e una vista dall'alto del dispositivo.

L'obiettivo di questo problema è di determinare la dimensione e la posizione del disco di metallo.

Nel seguito, quando viene richiesto di esprimere il risultato in termini di quantità note, devi sempre assumere che le seguenti grandezze siano note:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

L'obiettivo è di determinare r_2, h_2 e d, attraverso misure indirette.

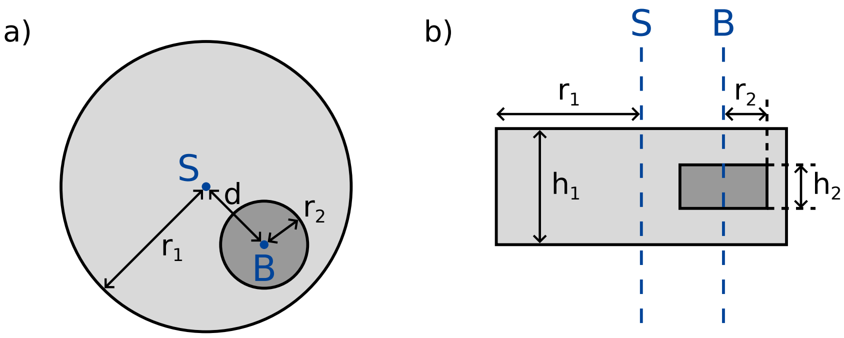

Figura 1: a) vista laterale b) vista dall'alto

Sia b la distanza tra il centro di massa C dell'intero sistema e l'asse di simmetria S del disco di legno. Allo scopo di determinare questa distanza, progettiamo il seguente esperimento: si collochi il disco di legno su una base orizzontale in modo tale che si trovi in equilibrio stabile. Ora si inclini leggermente la base di un angolo Θ (vedasi Fig. 2). A causa della presenza dell'attrito statico il cilindro di legno può rotolare liberamente senza slittare. Esso rotolerà di poco verso il basso lungo il piano inclinato e poi si fermerà in una situazione di equilibrio stabile dopo essere ruotato di un angolo ϕ che è possibile misurare.

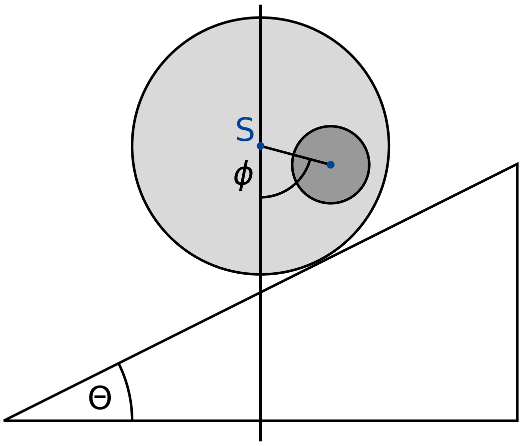

Figura 2: disco sopra al piano inclinato.

A.1	Scrivere un'espressione di b in funzione delle grandezze indicate in (1), dell'angolo ϕ e dell'angolo di inclinazione Θ del piano inclinato.	0.8pt

Da ora in avanti si può assumere che il valore di b sia noto.

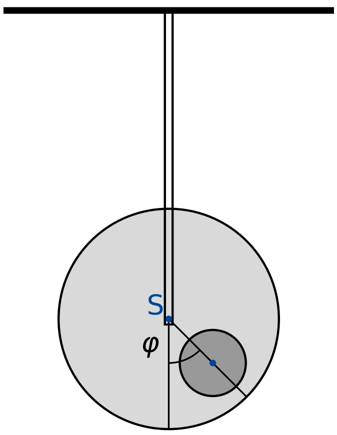

Figura 3: Disco sospeso.

Ora si vuole determinare il momento di inerzia I_S del sistema rispetto all'asse di simmetria S. Per questo scopo il disco di legno viene sospeso al suo asse di simmetria mediante un'asta rigida. Quindi il disco viene ruotato dalla sua posizione di equilibrio di un piccolo angolo ϕ, e lasciato andare. Vedere la figura 3 che mostra il montaggio. Si trova che ϕ descrive un moto periodico di periodo T.

A.2	Trovare l'equazione del moto dell'angolo ϕ. Esprimere il momento di inerzia I_S del sistema rispetto all'asse di simmetria S in funzione di T, b e delle grandezze note indicate in (1). Si può assumere che ci si sposta dalla posizione di equilibrio solamente di piccole quantità cosicché ϕ è sempre molto piccolo.	0.5pt

Dai risultati ricavati nelle domande **A.1** e **A.2**, si vuole determinare la geometria e la posizione del disco di metallo interno al disco di legno.

A.3	Ricavare un'espressione della distanza d in funzione di b e delle grandezze indicate in (1). Nella tua espressione puoi anche includere le grandezze r_2 e h_2 come variabili, poiché esse saranno successivamente determinate nella domanda **A.5**.	0.4pt

A.4	Ricavare un'espressione per il momento di inerzia I_S in funzione di b e delle grandezze note indicate in (1). Nella tua espressione puoi anche includere le grandezze r_2 e h_2 come variabili, poiché esse saranno successivamente determinate nella domanda **A.5**.	0.7pt

A.5	Usando tutti i risultati precedenti, scrivere un'espressione per h_2 e r_2 in funzione di b, T e delle grandezze note indicate in (1). Puoi esprimere h_2 come una funzione di r_2.	1.1pt

Parte B. Stazione Spaziale Rotante (6.5 punti)

Alice è un'astronauta che vive in una stazione spaziale. La stazione spaziale è una gigantesca ruota di raggio R che gira intorno al proprio asse, generando in questo modo una gravità artificiale per gli astronauti. Gli astronauti vivono nella parte interna del cerchione della ruota. Possono essere trascurati l'attrazione gravitazionale della stazione spaziale e localmente la curvatura della pavimentazione.

B.1	Con quale velocità angolare ω_{ss} la stazione spaziale deve ruotare in modo tale che gli astronauti percepiscano la stessa gravità g_E che percepirebbero sulla superficie terrestre?	0.5pt

Alice e il suo amico astronauta Bob hanno una disputa. Bob non crede che si trovino effettivamente dentro una stazione spaziale e ritiene di essere sulla Terra. Alice, usando argomenti di fisica, vuole dimostrare a Bob che si trovano dentro ad una stazione spaziale rotante. A tal fine, appende una massa m ad una molla di costante elastica k e la mette in oscillazione. La massa può oscillare solamente in direzione verticale e non può muoversi in direzione orizzontale.

B.2	Assumendo che sulla Terra la gravità sia costante e valga g_E, quale sarebbe la frequenza di oscillazione ω_E del sistema misurata da una persona che si trova sulla Terra?	0.2pt

B.3	Qual è la frequenza di oscillazione ω misurata da Alice sulla stazione spaziale?	0.6pt

Alice è convinta che il suo esperimento dimostri che si trovano dentro una stazione spaziale rotante. Bob rimane scettico. Egli controbatte che se si prendesse in considerazione la variazione della gravità sulla superficie terrestre si otterrebbero risultati analoghi. Nel successivo passaggio studieremo se Bob ha ragione.

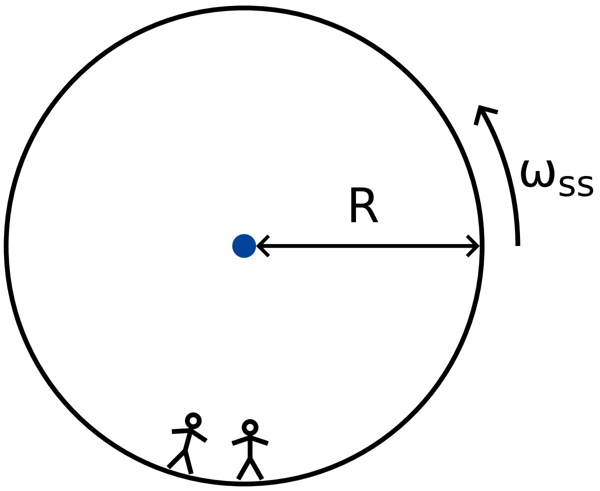

Figura 4: Stazione spaziale

B.4	Ricava un'espressione per la gravità $g_E(h)$ per piccole altezze h sopra la superficie terrestre e calcola la frequenza di oscillazione $\tilde{\omega}_E$ della massa oscillante (un'approssimazione lineare è più che sufficiente). Indica con R_E il raggio della Terra. Trascura la rotazione della Terra.	0.8pt

Effettivamente, per questa stazione spaziale Alice trova che il pendolo a molla oscilla con la frequenza prevista da Bob.

B.5	Per quale raggio R della stazione spaziale la frequenza di oscillazione ω è uguale alla frequenza di oscillazione $\tilde{\omega}_E$ sulla Terra? Esprimi la tua risposta in funzione di R_E.	0.3pt

Esasperata dalla testardaggine di Bob, Alice suggerisce un ulteriore esperimento per provare il suo punto di vista. A tal fine sale sulla cima di una torre di altezza H rispetto al pavimento della stazione spaziale e lascia cadere una massa. Questo esperimento può essere spiegato sia nel sistema di riferimento rotante così come in un sistema di riferimento inerziale.

In un sistema di riferimento rotante in modo uniforme, gli astronauti percepiscono una forza fittizia $\vec{F}_C$ detta forza di Coriolis. La forza $\vec{F}_C$ che agisce su un oggetto di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$ in un riferimento rotante con velocità angolare costante $\vec{\omega}_{ss}$ è data da

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

In termini di grandezze scalari si ha

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

dove ϕ è l'angolo tra la velocità e l'asse di rotazione. La forza è perpendicolare sia alla velocità v che all'asse di rotazione. Il verso della forza può essere determinato con la regola della mano destra, ma in quello che segue lo puoi scegliere a tuo piacimento.

B.6	Calcola la velocità orizzontale v_x e lo spostamento orizzontale d_x (relativo alla base della torre, in direzione perpendicolare alla torre stessa) della massa nell'istante in cui tocca la pavimentazione. Puoi assumere che l'altezza H della torre sia piccola, così che l'accelerazione misurata dagli astronauti sia costante durante la caduta. Inoltre puoi assumere che sia $d_x \ll H$.	1.1pt

Per ottenere un buon risultato, Alice decide di condurre questo esperimento da una torre molto più alta della precedente. Con sua sorpresa, la massa tocca la pavimentazione alla base della torre, così che $d_x = 0$.

B.7	Trova la minima altezza della torre per la quale accade che $d_x = 0$.	1.3pt

Alice è desiderosa di fare un ultimo tentativo per convincere Bob. Vuole usare il suo precedente oscillatore a molla per mostrare gli effetti della forza di Coriolis. A tal fine modifica il montaggio precedente: attacca la molla a un anello che può scivolare liberamente lungo un'asta orizzontale in direzione x senza attrito. La molla oscilla in direzione y. L'asta è parallela alla pavimentazione e perpendicolare all'asse di rotazione della stazione spaziale. Il piano xy è così perpendicolare all'asse di rotazione, con la direzione y che punta diritta verso il centro di rotazione della stazione.

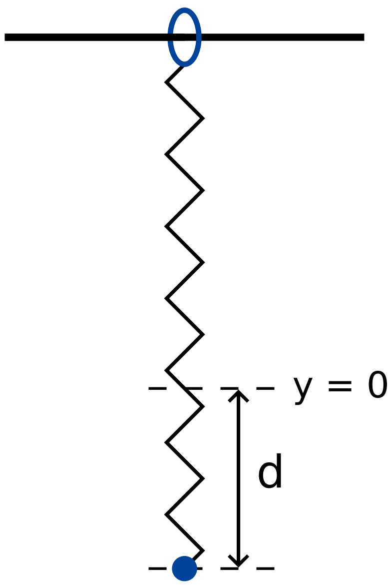

Figura 5: Montaggio.

B.8	Alice spinge la massa a distanza d verso il basso rispetto al punto di equilibrio $x = 0$, $y = 0$, e poi la lascia andare (vedi figura 5). • Fornisci un'espressione algebrica per $x(t)$ e $y(t)$. Puoi assumere che la quantità $\omega_{ss}d$ sia piccola, e trascurare la forza di Coriolis per il moto lungo l'asse y. • Disegna la traiettoria $(x(t), y(t))$, evidenziando tutte le caratteristiche importanti come per esempio l'ampiezza.	1.7pt

Alice e Bob continuano a litigare.