# Dinamica non-lineare nei circuiti elettrici (10 punti)

Per favore, leggi le istruzioni di carattere generale nella busta a parte prima di iniziare a lavorare su questo problema.

### Introduzione

Elementi semiconduttori non-lineari bistabili (per es. i thyristor) sono ampiamente usati in elettronica come interruttori e generatori di oscillazioni elettromagnetiche. Il principale campo di applicazione dei thyristor è nel controllo delle correnti alternate in circuiti elettronici di potenza, per esempio per la conversione di corrente alternata (AC) in corrente continua (DC) con potenze dell'ordine del megawatt.

Elementi bistabili possono servire anche per modellizzare fenomeni di auto-organizzazione in fisica (la parte B del problema si riferisce a questo argomento), in biologia (v. parte C) e in altri campi della moderna scienza non lineare.

### Obbiettivi

Studiare le instabilità e la dinamica non banale di circuiti che contengono elementi aventi una curva caratteristica $I-V$ non lineare.

Scoprire possibili applicazioni di tali circuiti in ingegneria e nella modellizzazione di sistemi biologici.

## Parte A. Stati stazionari e instabilità (3 punti)

La figura 1 mostra la curva caratteristica $I-V$ , detta **ad S**, di un elemento non-lineare $X$. Nell'intervallo di d.d.p. tra $U_\mathrm{h} = 4.00\ \mathrm{V}$ (tensione di mantenimento - *holding voltage*) e $U_\mathrm{th} = 10.0\ \mathrm{V}$ (tensione di soglia - *threshold voltage*) questa curva caratteristica $I-V$ è una funzione a più valori. Per semplicità il grafico di figura 1 è stata scelto come una curva non lineare "a tratti" (ogni ramo è costituito da un segmento di retta). In particolare il ramo più in alto appartiene ad una retta passante per l'origine.

Questa approssimazione dà una buona descrizione di un thyristor reale.

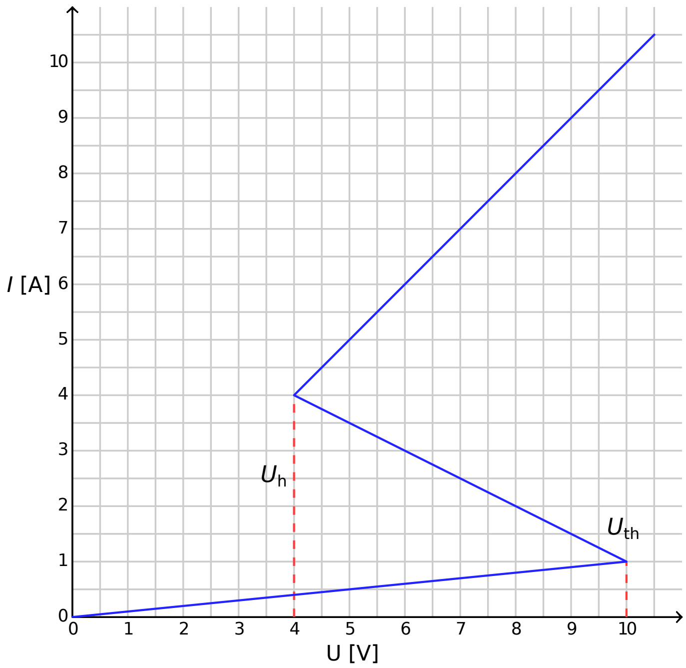


Figura 1: Curva caratteristica $I-V$ dell'elemento non-lineare $X$.

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | Usando il grafico, determina la resistenza $R_{\text{on}}$ dell'elemento $X$ nel ramo superiore della curva caratteristica $I-V$, e $R_{\text{off}}$ nel ramo inferiore, rispettivamente. Il ramo intermedio è descritto dall'equazione $$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$ Trovare il valore dei parametri $I_0$ e $R_{\text{int}}$. | 0.4pt |

L'elemento $X$ è collegato in serie (v. figura 2) con il resistore $R$, l'induttore $L$ e un generatore ideale di d.d.p. $\mathcal{E}$. Si dice che il circuito è in uno stato stazionario se la corrente è costante nel tempo, $I(t) = \text{const}$.

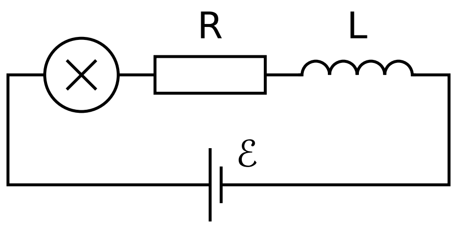


Figura 2: Circuito con l'elemento $X$, un resistore $R$, un inductore $L$ e un generatore di d.d.p. $\mathcal{E}$.

| | | |
|---|---|---|
| **A.2** | Quali sono i possibili numeri di stati stazionari che il circuito di figura 2 può avere per un dato valore $\mathcal{E}$ della d.d.p. del generatore e per $R = 3.00\ \Omega$? Come cambia la risposta per $R = 1.00\ \Omega$? | 1pt |

| | | |
|---|---|---|
| **A.3** | Sia $R = 3.00\,\Omega$, $L = 1.00\,\mu\mathrm{H}$ ed $\mathcal{E} = 15.0\,\mathrm{V}$ nel circuito mostrato in figura 2. Determina il valore della corrente $I_{\text{stationary}}$ e della d.d.p. $V_{\text{stationary}}$ ai capi dell'elemento non-lineare $X$, nello stato stazionario. | 0.6pt |

Il circuito di figura 2 è in uno stato stazionario con $I(t) = I_{\text{stationary}}$.

Questo stato stazionario è detto stabile se, a seguito di un piccolo spostamento (la corrente cresce o decresce), la corrente torna al valore dello stato stazionario. Se invece il sistema tende ad allontanarsi ulteriormente dallo stato stazionario, si dice che questo è instabile.

| | | |
|---|---|---|
| **A.4** | Usa i valori numerici della domanda A.3 e studia la stabilità dello stato stazionario con $I(t) = I_{\text{stationary}}$. E' stabile o instabile? | 1pt |

## Parte B. Elementi bistabili non-lineari in fisica: trasmettitore radio (5 punti)

Consideriamo adesso una diversa configurazione circuitale (v. figura 3). Questa volta l'elemento non-lineare $X$ è collegato in parallelo ad un condensatore di capacità $C = 1.00\,\mu\mathrm{F}$. Questo blocco è collegato in serie al resistore di resistenza $R = 3.00\ \Omega$ e a un generatore ideale di d.d.p. costante $\mathcal{E} = 15.0\ \mathrm{V}$. Viene fuori che il circuito inizia ad oscillare con l'elemento non lineare $X$ che salta da un ramo della curva caratteristica $I - V$ ad un altro, nel corso di un ciclo.

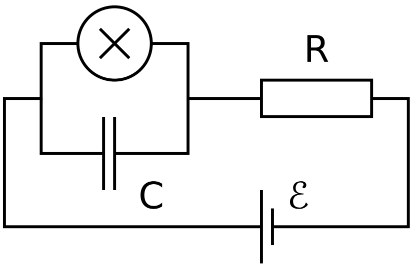


Figura 3: Circuito con l'elemento $X$, il condensatore $C$, il resistore $R$ e il generatore di d.d.p. $\mathcal{E}$.

| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | Traccia il ciclo dell'oscillazione sul grafico della curva caratteristica $I - V$, precisando il suo verso (orario o antiorario). Giustifica la tua risposta con equazioni e schizzi. | 1.8pt |

| | | |
|---|---|---|
| **B.2** | Trova le espressioni dei tempi $t_1$ e $t_2$ durante i quali il sistema si trova in ciascuno dei due rami della curva caratteristica $I - V$ durante il periodo di un'oscillazione. Determina i loro valoci numerici. Trova il valore numerico del periodo di oscillazione $T$ facendo l'ipotesi che i tempi necessari a saltare da un ramo ad un altro della curva $I - V$ siano trascurabili. | 1.9pt |

| | | |
|---|---|---|
| **B.3** | Stima la potenza media $P$ dissipata nell'elemento non-lineare nel corso di un'oscillazione. E' sufficiente dare l'ordine di grandezza. | 0.7pt |

Il circuito di figura 3 viene usato per costruire una trasmittente radio.

Per questo scopo l'elemento $X$ viene connesso ad un'estremità di un'antenna lineare (un lungo filo rettilineo) di lunghezza $s$. L'altra estremità del filo è libera. Nell'antenna si forma un'onda elettromagnetica. La velocità dell'onda elettromagnetica lungo l'antenna è la stessa del vuoto. Il trasmettitore usa l'armonica principale del sistema che ha il periodo $T$ della domanda B.2.

| | | |
|---|---|---|
| **B.4** | Qual è il valore ottimale di $s$ assumendo che esso non possa superare la lunghezza di $1\ \mathrm{km}$? | 0.6pt |

## Parte C. Elementi bistabili non-lineari in biologia: il neuristor (2 punti)

In questa parte del problema consideriamo un'applicazione degli elementi bistabili non-lineari per modellizzare dei processi biologici. Un neurone del cervello umano ha questa proprietà: quando viene eccitato da un segnale esterno, effettua una singola oscillazione e torna nel suo stato iniziale. Questa caratteristica è chiamata eccitabilità. A causa di questa proprietà gli impulsi si possono propagare nella rete di neuroni accoppiati che formano i sistemi nervosi. Un chip semiconduttore progettato per simulare l'eccitabilità e la propagazione di un impulso è chiamato *neuristor* (da neurone e transistor).

Cerchiamo di modellizzare un semplice neuristor usando un circuito che include l'elemento non lineare $X$ che abbiamo studiato precedentemente. Per questo la d.d.p. $\mathcal{E}$ nel circuito di figura 3 viene diminuita al valore $\mathcal{E}' = 12.0\ \mathrm{V}$. Le oscillazioni si interrompono e il sistema raggiunge uno stato stazionario. In seguito la d.d.p. viene improvvisamente riportata al valore $\mathcal{E} = 15.0\ \mathrm{V}$, e dopo un intervallo di tempo $\tau$ (con $\tau < T$) viene fissata di nuovo al valore $\mathcal{E}'$ (v. figura 4).

Si vede che esiste un certo valore critico $\tau_{\mathrm{crit.}}$, e che il sistema mostra un diverso comportamento a seconda che sia $\tau < \tau_{\mathrm{crit}}$ oppure $\tau > \tau_{\mathrm{crit}}$.

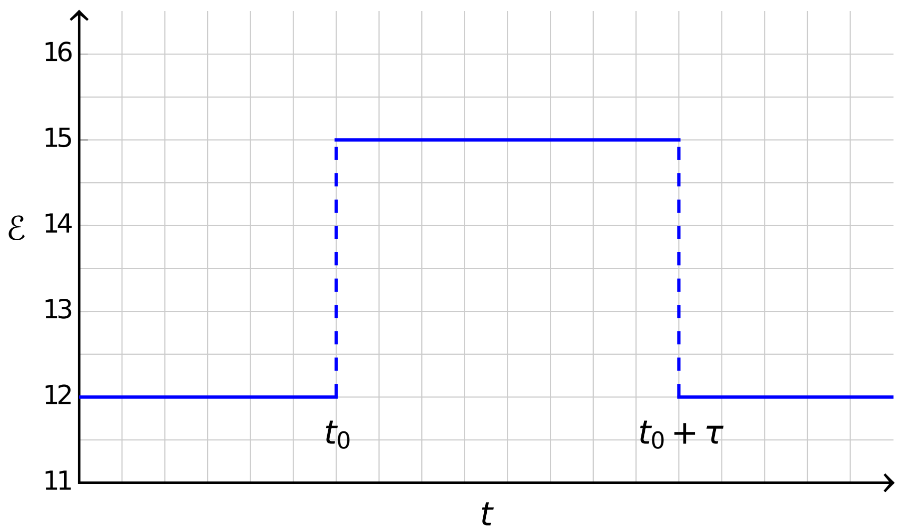


Figura 4: d.d.p. ai capi del generatore, in funzione del tempo.

| | | |
|---|---|---|
| **C.1** | Fai uno schizzo del grafico della corrente $I_X(t)$ che attraversa l'elemento non-lineare $X$ nel caso $\tau < \tau_{\mathrm{crit}}$ e nel caso $\tau > \tau_{\mathrm{crit}}$. | 1.2pt |

| | | |
|---|---|---|
| **C.2** | Trova l'espressione e il valore numerico del tempo critico $\tau_{\mathrm{crit}}$ per il quale il comportamento cambia. | 0.6pt |

| | | |
|---|---|---|
| **C.3** | Il circuito con $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s rappresenta un neuristor? | 0.2pt |