Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Campionati di Fisica 2024

38ª edizione

Gara nazionale sperimentale — Soluzione — Giovedì 11 aprile 2024

LA CATENA OSCILLANTE

Quesito n. 1.

Si vuole che $\Delta T/T \leq 0.005$. In realtà, si misura un tempo $t = nT$, dove n è il numero delle oscillazioni *isocrone* fatte compiere al sistema. Ripetendo N volte la misura, e ritenendo che essa sia ragionevolmente affetta esclusivamente da incertezze accidentali, allora l'incertezza da associare alla media delle N misure è data dalla deviazione standard della media

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_1^N (t-\bar{t})^2)}{N(N-1)}}$$

Posto $\bar{t} = nT$ e $\sigma_{\mathrm{m}} = n\Delta T$, si vuole che $\sigma_{\mathrm{m}}/\bar{t} = \Delta T/T \leq 0.005$, ossia

$$\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{nT} = \frac{\sigma}{nT\sqrt{N}} \leq 0.005$$

Aumentando N si ha un livellamento dell'incertezza casuale sulla misura di $\bar{t}$; aumentando n si contribuisce ad aumentare la precisione in quanto si aumenta $\bar{t}$. Entrambi i fattori N e n concorrono al raggiungimento dell'obiettivo richiesto dal testo. Più grandi sono, più la diseguaglianza può essere garantita. Tuttavia, N è sotto la radice quadrata e questo rende meno efficace il suo effetto rispetto a quello che può produrre n.

Effettuando un numero limitato di serie, cioè per $N = 3 \div 5$, si vuole conoscere il numero di oscillazioni n da far compiere alla catena affinché risulti rispettata la condizione di lavoro dettata dal testo.

Essa sarà tale se

$$n \geq \frac{\sigma}{0.005\,T\sqrt{N}}$$

Poiché è più immediato avere indicazioni sulla semidispersione $\Delta/2$ con cui si riesce a effettuare il cronometraggio, rispetto al calcolo della deviazione standard, e poiché per un numero limitato di serie le differenze tra i due parametri sono piccole, il numero di oscillazioni può essere impostato rispettando la condizione

$$n \geq \frac{\Delta/2}{0.005\,T\sqrt{N}}$$

Valutando, ad esempio, che sia $\Delta/2 \approx 0.08s$; $T \approx 0.8s$, e $N = 5$ serie di misure, occorre far effettuare $n > 20/\sqrt{5} = 9$. D'altra parte se $N = 3$ deve risultare $n > 20/\sqrt{3} = 12$.

L'avvio delle oscillazioni che caratterizzano il primo modo si realizza spostando lateralmente l'estremità inferiore della catena, similmente all'avvio di un pendolo semplice Le eventuali impurità del moto che possono manifestarsi dopo il rilascio tendono a estinguersi rapidamente lasciando che le oscillazioni della catena abbiano le caratteristiche descritte nel testo della prova (vedi la Fig. 1 del testo). È dunque necessario osservare l'evoluzione del fenomeno prima di procedere con le misure!

Nella tabella successiva si riporta l'esito e l'elaborazione di tutte le misure.

n. clip	ℓ /cm	n. osc.	t /s	t /s	t /s	t_{m} /s	T /s	$\pm e_a(T)$ /s	$e_{\mathrm{r}}(T)$	T_0 /s	$e_{\mathrm{r}}(T_0)$
4	22.3	20	15.79	15.73	15.73	15.75	0.7875	0.0015	0.0019	0.9473	0.0045
5	27.9	20	17.63	17.63	17.62	17.63	0.8813	0.0002	0.0003	1.0596	0.0036
6	33.5	20	19.26	19.26	19.32	19.28	0.9640	0.0015	0.0016	1.1611	0.0030
7	39.1	20	20.76	20.82	20.78	20.79	1.0393	0.0015	0.0014	1.2544	0.0026
8	44.7	20	22.27	22.28	22.28	22.28	1.1138	0.0003	0.0002	1.3412	0.0022
9	50.2	20	23.63	23.57	23.65	23.62	1.1808	0.0020	0.0017	1.4213	0.0020
10	55.7	20	24.88	25.01	24.94	24.94	1.2472	0.0033	0.0026	1.4972	0.0018
11	61.4	20	26.01	26.16	26.06	26.08	1.3038	0.0037	0.0029	1.5719	0.0016
12	67.0	20	27.20	27.25	27.44	27.30	1.3648	0.0060	0.0044	1.6420	0.0015

Il periodo del pendolo semplice vale $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

L'errore relativo da associarvi vale $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{e_a(\ell)}{\ell}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{e_a(g)}{g}\right)^2}$.

Nei calcoli è stata ipotizzata un'incertezza sulle misure di lunghezza uguale a $\pm 2\,\mathrm{mm}$, mentre l'errore su g è stato ritenuto trascurabile.

Quesito n. 2.

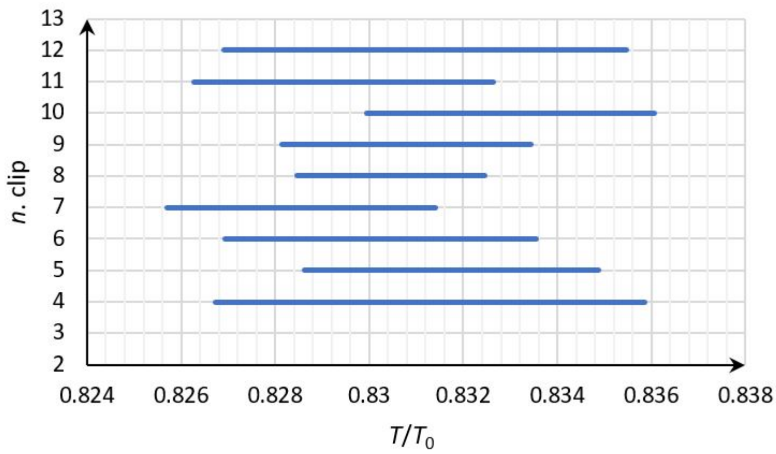
ℓ /cm	T/T_0	$e_{\mathrm{r}}(T/T_0)$	$e_a(T/T_0)$ $\pm$
22.3	0.8311	0.0047	0.0039
27.9	0.8315	0.0036	0.0030
33.5	0.8300	0.0032	0.0026
39.1	0.8283	0.0027	0.0022
44.7	0.8303	0.0022	0.0019
50.2	0.8306	0.0022	0.0019
55.7	0.8328	0.0023	0.0020
61.4	0.8292	0.0023	0.0019
67.0	0.8310	0.0031	0.0025
media	0.8307		
$\Delta/2$	0.001		

Ciascuna misura del rapporto T/T_0 differisce di poco dalle altre e le differenze si manifestano in modo casuale a testimonianza delle cause di errore accidentale che le determinano.

Per il calcolo di $e_{\mathrm{r}}(T/T_0)$ si ha

$$e_{\mathrm{r}}(T/T_0) = \sqrt{[e_{\mathrm{r}}(T)]^2 + [e_{\mathrm{r}}(T_0)]^2}$$

Inoltre, tutte le misure sono compatibili con l'ipotesi $T/T_0 = \text{cost}$, come è evidenziato dalla seguente rappresentazione degli intervalli di incertezza.



Si può pertanto ragionevolmente concludere che il rapporto T/T_0 vale

$$T/T_0 = T/T_0|_{\mathrm{med}} \pm \Delta/2 = 0.8307 \pm 0.0001$$

NOTA 1. *Si può dimostrare che, nel limite di maglie della catena sufficientemente piccole, la pulsazione ω_n dell'ennesimo modo di oscillazione è dato dalla relazione*

$$\omega_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, z_n$$

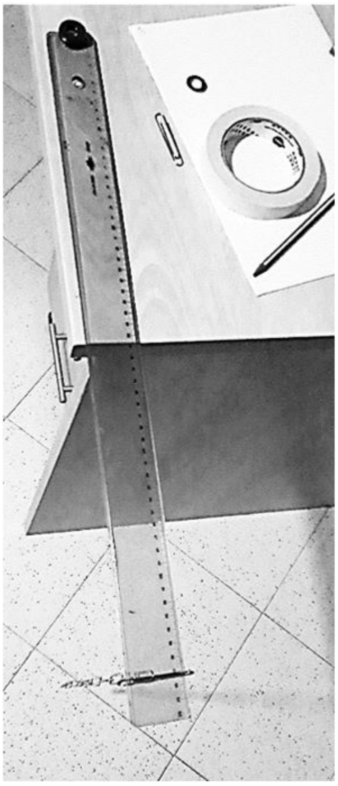
dove z_n rappresenta lo zero n-esimo della funzione di Bessel J_0. Per il primo zero il valore tabulato è $z_1 = 2.4048$ da cui si ottiene un valore del rapporto atteso

$$\left.\frac{T_0}{T_1}\right|_{\rm att} = \frac{2}{2.4048} = 0.8317.$$

Quesito n. 3.

Misura dei rapporti tra le masse. Per individuare la posizione del CdM della riga millimetrata si ricerca la condizione in cui rimane in equilibrio sul fulcro costituito da uno dei bordi del banco di lavoro. In questa operazione occorre fare in modo che il lato lungo della riga risulti parallelo al bordo del banco ortogonale a quello che costituisce il fulcro (vedi la foto)

Sia $d_{\sf CdM}$ il valore della posizione del CdM misurato direttamente sulla graduazione millimetrata incisa sulla riga. La posizione del CdM della riga della foto è risultato $d_{\sf CdM} = 30.6\,\mathrm{cm}$. La misura è risultata riproducibile *al millimetro.*



Mantenendo la riga in tale posizione si pone il centro geometrico del carico di tre rondelle grandi in corrispondenza dello 0. Si posizionano le clip in modo da garantire il maggior braccio possibile, con lo scopo di favorire la precisione nella misura di lunghezza. Rispetto alla riga millimetrata tale posizione coincide con la coordinata $60.0\,\mathrm{cm}$.

Si inizia, ad esempio, con 6 clip e, constatata la condizione di equilibrio statico, si procede aggiungendo alla catena una clip per volta. Con 12 clip viene meno la condizione di equilibrio e per ripristinarla è necessario spostare la catena, avvicinandola al fulcro sino alla coordinata $d_{\rm cat} = 57.8\,\mathrm{cm}$.

All'equilibrio si ha

$$n_{\rm r}\, M_{\rm g}\,(d_{\sf CdM} - d_{\rm r}) = n_{\rm c}\, m_c\,(d_{\rm c} - d_{\sf CdM})$$

Segue (in cifre significative)

$$\frac{M_{\rm g}}{m_c} = \frac{n_{\rm c}\,(d_{\rm c} - d_{\sf CdM})}{n_{\rm r}\,(d_{\sf CdM} - d_{\rm r})} = \frac{12 \times (57.8 - 30.6)}{3 \times 30.6} = 3.56$$

In modo analogo si procede per le tre rondelle medie ottenendo, per $n_{\rm c} = 6$, $d_{\rm c} = 59.6\,\mathrm{cm}$. Segue

$$\frac{M_{\rm m}}{m_c} = \frac{6 \times (59.5 - 30.6)}{3 \times 30.6} = 1.89$$

e per le tre rondelle piccole ottenendo, per $n_{\rm c} = 6$, $d_{\rm c} = 53.0\,\mathrm{cm}$. Segue

$$\frac{M_{\rm p}}{m_c} = \frac{6 \times (53.0 - 30.6)}{3 \times 30.6} = 0.732$$

Riassumendo,

n. clip	n. rondelle	$d_{\rm c}/\mathrm{cm}$	$d_{\rm r}/\mathrm{cm}$	$M_{\rm r}/m_c$
11	3 grandi	57.8	30.6	3.56
6	3 medie	59.6	30.6	1.89
6	3 piccole	53.0	30.6	0.732

Quesito n. 4a.

tipo rond.	n. rond.	n. clip	M/m
p	1	12	0.061
p	2	12	0.122
p	3	12	0.183
m	1	12	0.157
m	2	12	0.315
m	3	12	0.472
g	1	12	0.296
g	2	12	0.593
g	3	12	0.889

Ordinando in ordine crescente del rapporto M/m si ha

tipo rond.	n. rond.	n. clip	M/m
p	1	12	0.061
p	2	12	0.122
m	1	12	0.157
p	3	12	0.183
g	1	12	0.296
m	2	12	0.315
m	3	12	0.472
g	2	12	0.593
g	3	12	0.889

Quesito n. 4b.

Per ottenere la misura del periodo T_0 con la precisione richiesta è necessario effettuare misure di lunghezza con un'incertezza di $\pm 1 \div 2\,\mathrm{mm}$. Può essere d'aiuto fissare, con nastro adesivo, il nastro metrico di carta al banco di lavoro in modo che sia steso parallelamente alla catena. Con queste modalità si ottengono errori relativi dell'ordine di tre parti su mille sulla misura del periodo T_0.

Per la misura di T è importante rispettare la consegna sull'errore relativo: esso deve risultare circa uguale a 0.001. Poiché $T \approx 1.5\,\mathrm{s}$ occorre che l'incertezza sul periodo sia dell'ordine di $\pm 0.0015\,\mathrm{s}$.

Non volendo effettuare più di $N = 3$ serie, e riuscendo a effettuare cronometraggi della durata t di n oscillazioni con una semidispersione, ad esempio, $\Delta/2 \approx 0.07\,\mathrm{s}$, si vuol stabilire il numero n di oscillazioni da far compiere alla catena in ciascuna serie.

In queste condizioni la deviazione standard e la semidispersione assumono, in pratica, lo stesso valore, pertanto

$$\sigma_{\mathrm{m}}(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \approx \frac{\Delta/2}{\sqrt{N}} = \frac{0.07s}{\sqrt{3}} \approx 0.040\,\mathrm{s}$$

Poiché $t = nT$, segue $n = \sigma_{\mathrm{m}}(t)/\sigma_{\mathrm{m}}(T) > 0.040/0.0015 \approx 27$ oscillazioni. Nelle stesse condizioni di lavoro, volendo impiegare solo 20 oscillazioni occorrerebbe effettuare almeno sei serie di misure per ogni carico. Ovviamente, se si riesce a effettuare cronometraggi con una semidispersione inferiore a quella ipotizzata il valore di n diminuisce di conseguenza. Ad esempio, per $\Delta/2 \approx 0.05\,\mathrm{s}$ e $N = 3$, si ha $n = 19$.

Un buon cronometrista può scegliere di impostare $n = 25$ e $N = 3$, aumentando quest'ultimo parametro in corso d'opera se si rendesse necessario.

Quesito n. 4c.

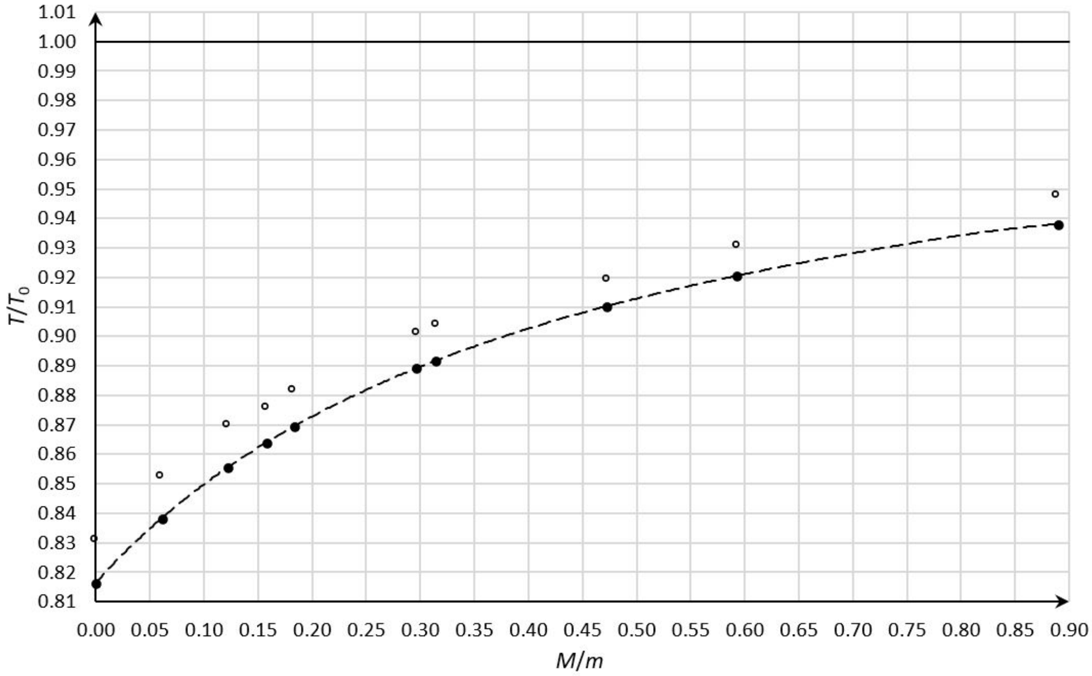
Tabella di raccolta ed elaborazione delle misure

carico	n. clip	L /m	M/m	t 20 /s	t 20 /s	t 20 /s	$\pm e_a(t20)$ /s	$\Delta t/t$	T /s	ΔT /s	T_0 /s	$\Delta T_0/T_0$	T/T_0
0	12	0.670	0	27.20	27.25	27.44	0.120	0.0044	1.365	0.006	1.642	0.003	0.8312
1p	12	0.672	0.061	28.04	28.04	28.03	0.005	0.0002	1.402	0.000	1.644	0.003	0.8527
2p	12	0.672	0.122	28.61	28.62	28.62	0.005	0.0002	1.431	0.000	1.644	0.003	0.8703
1m	12	0.674	0.157	28.83	28.82	28.89	0.035	0.0012	1.442	0.002	1.647	0.003	0.8757
3p	12	0.672	0.183	29.03	28.99	28.95	0.040	0.0014	1.450	0.002	1.644	0.003	0.8817
1g	12	0.676	0.296	29.76	29.74	29.68	0.040	0.0013	1.486	0.002	1.649	0.003	0.9014
2m	12	0.674	0.315	29.82	29.75	29.75	0.035	0.0012	1.489	0.002	1.647	0.003	0.9039
3m	12	0.674	0.472	30.27	30.28	30.27	0.005	0.0002	1.514	0.000	1.647	0.003	0.9190
2g	12	0.676	0.593	30.73	30.71	30.67	0.030	0.0010	1.535	0.001	1.649	0.003	0.9310
3g	12	0.672	0.889	31.10	31.21	31.18	0.055	0.0018	1.558	0.003	1.644	0.003	0.9479

Quesito n. 5.

Tabella riassuntiva

M/m	T/T_0 catena	T/T_0 asta rigida
0.000	0.8312	0.817
0.061	0.8527	0.838
0.122	0.8703	0.856
0.157	0.8757	0.864
0.183	0.8817	0.869
0.296	0.9014	0.889
0.315	0.9039	0.892
0.472	0.9190	0.910
0.593	0.9310	0.922
0.889	0.9479	0.938



Quesito n. 6.

Per studiare la corrispondenza tra la formula

$$\frac{T}{T_0} = a\left(\frac{2m+6M}{3m+6M}\right)^b$$

e i punti sperimentali occorre riscriverla in forma logaritmica

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = \ln(a) + b\ln\left(\frac{2+6M/m}{3+6M/m}\right)$$

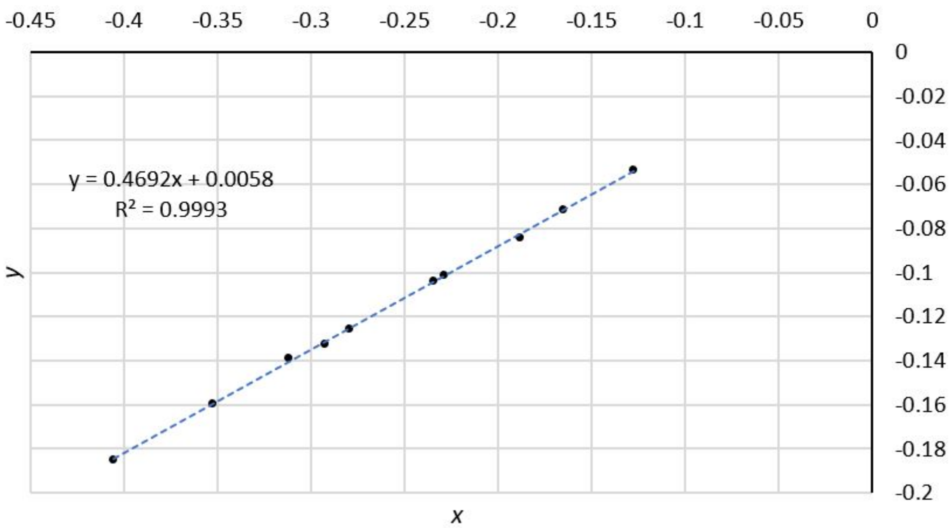
Ponendo

$$x = \ln\left(\frac{2+6M/m}{3+6M/m}\right) \quad \text{e} \quad y = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \qquad \text{si perviene alla linearizzazione auspicata.}$$

L'accordo dell'equazione con i valori misurati permette il calcolo delle costanti a e b, e questo può essere condotto graficamente oppure mediante l'uso delle funzioni statistiche della calcolatrice. In tabella sono calcolati i valori delle variabili x e y usando le misure elencate nella tabella in Q4c.

M/m	T/T_0	x	y	T/T_0 previsto	diff. %
0.0000	0.8312	-0.40547	-0.18488	0.832	0.044
0.0610	0.8527	-0.35255	-0.15935	0.853	0.027
0.1220	0.8703	-0.31191	-0.13892	0.869	0.163
0.1574	0.8757	-0.29238	-0.13273	0.877	0.135
0.1829	0.8817	-0.27979	-0.12590	0.882	0.042
0.2964	0.9014	-0.23481	-0.10381	0.901	0.057
0.3149	0.9039	-0.22883	-0.10104	0.903	0.053
0.4723	0.9190	-0.18804	-0.08447	0.921	0.204
0.5928	0.9310	-0.16549	-0.07150	0.930	0.035
0.8892	0.9478	-0.12781	-0.05361	0.947	0.056

Usando la costruzione grafica



Da cui $\quad b = 0.4692, \quad \ln a = 0.0058, \quad a = 1.005\,.$

Attraverso le funzioni statistiche si ottiene

$b = 0.4692, \quad \ln a = 0.0058, \quad a = 1.006, \quad r = 0.9997$

Il valore molto vicino a 1 del coefficiente di correlazione conferma la dipendenza lineare tra le variabili x e y. Ciò giustifica il calcolo delle costanti a e b. In definitiva, si ha

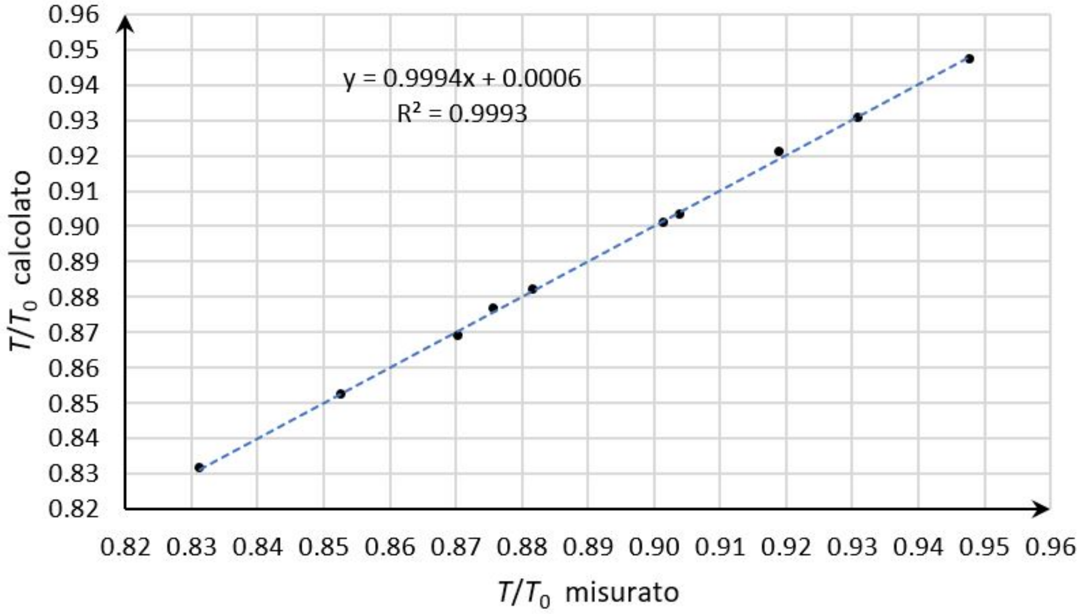
$$\frac{T}{T_0} = 1.005\left(\frac{2m+6M}{3m+6M}\right)^{0.469}$$

Per valutare la corrispondenza tra il valore del rapporto T/T_0 misurato e quello previsto dalla relazione ottenuta (ultima colonna della precedente tabella) si può procedere in diversi modi.

Ad esempio, usando le funzioni statistiche della calcolatrice si ottiene

- ordinata all'origine 0.008 (dunque ≈ 0)
- coefficiente angolare 0.991 (dunque ≈ 1)
- coefficiente di correlazione $r = 0.9996$

di conseguenza la retta interpolatrice ha i parametri che la rendono praticamente coincidente con la bisettrice del primo quadrante. Usando la costruzione grafica (non richiesta) si ha un'ulteriore conferma del risultato. Vedi la sesta colonna dell'ultima tabella.



In alternativa si può calcolare la variazione percentuale tra i valori di T/T_0 calcolati con la funzione proposta e quelli misurati e osservare che i risultati si attestano attorno allo 0.1 % , giustificando così la relazione ipotizzata.

NOTA 2. *Per $M/m \to \infty$ si ha*

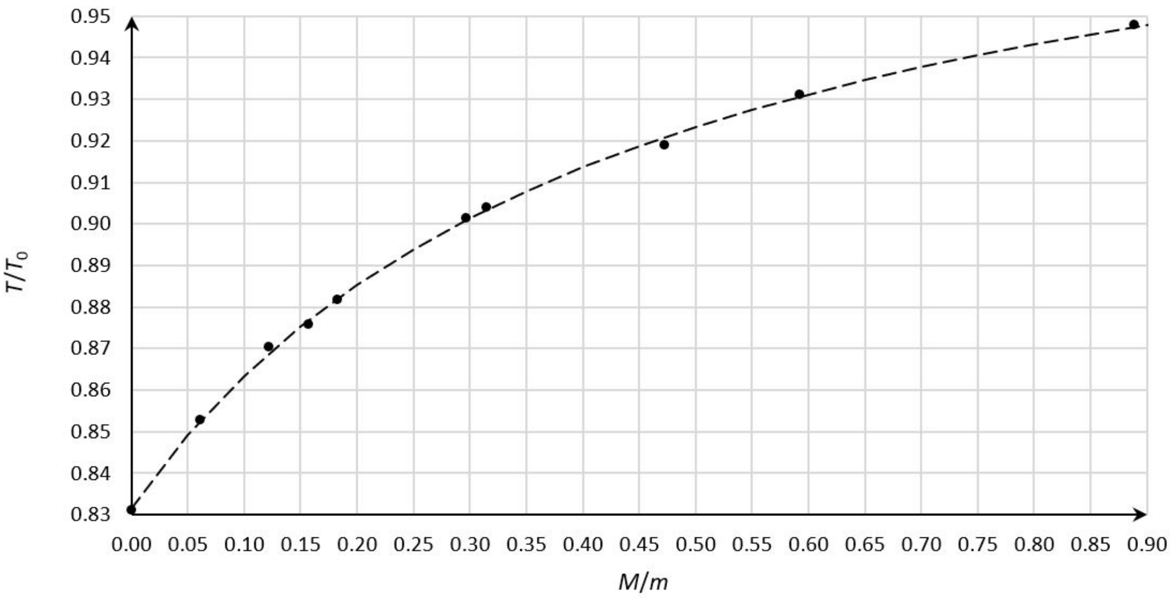
$$\ln\left(\frac{6M+2m}{6M+3m}\right) \to \ln(1) = 0 \quad e \quad \ln\frac{T}{T_0} \to \ln(1) = 0.$$

In tale condizione la catena si comporta come un pendolo semplice (lo stesso dicasi per un'asta rigida). Con questa argomentazione si può concludere che il parametro a che compare nella (2) del testo debba valere uno.

Sarebbe tuttavia sbagliato ricavare b partendo da questo risultato e ponendo nella (2) $M = 0$ senza la verifica preventiva dell'accordo tra l'equazione empirica (2) e le misure effettuate.

Per la stessa ragione non sarebbe corretto ricavare i due parametri a e b mettendo a sistema l'equazione (2) scritta per due sole condizioni di lavoro definite da altrettante coppie di valori dei rapporti M/m e T/T_0.

NOTA 3. *Per valutare il grado di accordo tra le misure e la formula ottenuta (curva punteggiata in figura seguente) per valori $M/m < 1$ si può graficare il rapporto T/T_0 calcolato con la funzione ipotizzata in funzione delle misure effettuate.*



Quesito n. 7.

Le condizioni geometriche imposte per l'avvio sono facilmente realizzabili, tuttavia occorrono diversi tentativi per riuscire a far rimanere *quasi fermo* il punto B - il nodo. Con un po' di pratica si riesce a raggiungere un risultato che si avvicina abbastanza a quello descritto. Il moto della catena è caratterizzato dal fatto che il periodo delle oscillazioni dell'arco AMB e quello dell'estremo F sono uguali. Per le misure ci si può riferire all'uno o all'altro moto.

Dato che il periodo che caratterizza il modo di oscillazione è relativamente breve è necessario impiegare un congruo numero di oscillazioni complete per minimizzare l'incertezza da associare alla sua misura. Nell'esempio riportato sotto sono state impiegate $n = 30$ oscillazioni. Un numero N di serie adeguato contribuisce al raggiungimento dell'obiettivo.

Utilizzando la catena sospesa realizzata con 11 clip si ottengono le misure seguenti

Lunghezza della catena	$\ell = 0.614\,\mathrm{m}$
Δt relativo a 30 oscillazioni	$16.99\,\mathrm{s}$ $17.04\,\mathrm{s}$ $17.00\,\mathrm{s}$
Media	$17.01\,\mathrm{s}$
$\Delta/2$	$\pm 0.025\,\mathrm{s}$
periodo medio	$T_{(2)} = 0.5670 \pm 0.0008\,\mathrm{s}$
Errore relativo	$e_\mathrm{r}\left(T_{(2)}\right) = 0.0015$

Il periodo del pendolo semplice vale

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

L'errore relativo da associarvi vale

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\,\frac{e_a(\ell)}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,\frac{e_a(g)}{g}\right)^2}$$

Stimando che $e_a(\ell) = 0.002\,\mathrm{m}$ e avendo misurato $\ell = 0.614\,\mathrm{m}$, si evince subito che l'incertezza prevalente è quella sulla misura di lunghezza e lo è per ben due ordini di grandezza, cosicché

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.614}{9.81}}\left[1 \pm \sqrt{\left(0.5 \times \frac{0.002}{0.614}\right)^2})\right]\ \mathrm{s} = (1.5719 \pm 0.0026)\,\mathrm{s}$$

L'incertezza relativa su T_0 vale

$$e_r(T_0) = 0.0026/1.5719 = 0.0017$$

Poiché

$$e_r(T_{(2)}/T_0) = \sqrt{e_r(T_{(2)})^2 + e_r(T_0)^2} = 0.0023$$

Segue

$$T_{(2)}/T_0 = 0.5670/1.572 \times (1 \pm 0.0023) = 0.3607 \pm 0.0008$$

Considerato che

$$2e_r(T_{(2)}) \gg e_r(g)$$

al punto da poter trascurare il secondo rispetto al primo, si può ragionevolmente concludere che la lunghezza del pendolo isocrono è

$$\ell_i = T_{(2)}^2 \frac{g}{4\pi^2} \left[1 \pm 2e_r(T_{(2)})\right] = (0.0799 \pm 0.0002)m, \quad \text{con} \quad e_r(\ell_i) = 0.0025\,.$$

Pertanto

$$\ell_i/\ell = 0.0799/0.614 \times (1 \pm \sqrt{\left(e_r(\ell_i)\right)^2 + \left(e_r(\ell)\right)^2} = 0.1301 \pm 0.0005.$$

NOTA 4. *Il valore tabulato del secondo zero della funzione di Bessel J_0 è $z_2 = 5.5201$.*

Dalle misure descritte in precedenza si ottiene

$$z_2 = 2\frac{T_0}{T_{(2)}} = 2/0.3607 = 5.545$$

NOTA 5. *Il numero di clip impiegato (11) è un compromesso tra più esigenze. Si può dimostrare che il nodo B che caratterizza il secondo modo di oscillazione capita a una distanza uguale a $0.81\,\ell$ dal punto di sospensione della catena. È necessario che tale punto sia materializzato dalla giunzione di due clip e ciò si può dimostrare che accadrebbe se il numero di clip utilizzate risultasse uguale a 21. In tal caso la lunghezza della catena sarebbe uguale a $1.176\,\mathrm{m}$ mentre il nodo B sarebbe posto a $0.953\,\mathrm{m}$ dal punto di sospensione: ciò corrisponderebbe alla posizione della giunzione tra la 17-esima e la 18-esima clip (posto a $0.952\,\mathrm{m}$ dal punto di sospensione). La lunghezza della catena realizzata con 21 clip però supererebbe la distanza tra il bordo del tavolo di lavoro, in prossimità del quale si trova il punto di sospensione della catena, e il pavimento.*

Impiegando 11 clip (lunghezza $0.614\,\mathrm{m}$) il nodo capita a una distanza di $0.499\,\mathrm{m}$ dal punto di sospensione, molto prossimo alla giunzione tra la nona e la decima clip (posto a $0.504\,\mathrm{m}$ dal punto di sospensione).

Appendice

In figura è rappresentata un'asta rigida, sottile, di massa m con appeso un corpo rigido di massa M.

Nell'ipotesi che il CdM dell'oggetto non coincida con l'estremità inferiore dell'asta, e che si possano trascurare le sue dimensioni rispetto alla lunghezza ℓ dell'asta, si ha

$$\left(-Mg\,\mathrm{sen}\,\theta - mg\,\frac{\ell}{2L}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) L = \left(M + \frac{m\ell^2}{3L^2}\right) L^2\ddot{\theta}$$

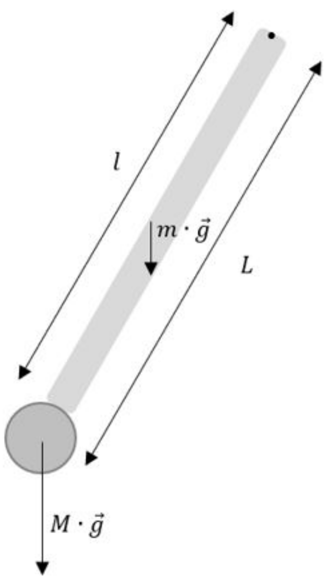
$$\left(M + \frac{ml^2}{3L^2}\right) L\ddot{\theta} + \left(M + \frac{m\ell}{2L}\right) g\theta = 0$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{g}{L}\,\frac{M + m\ell/(2L)}{M + m\ell^2/(3L^2)}\,.$$

E infine,

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{6M + 2m(\ell^2/L^2)}{6M + 3m(\ell/L)}}$$



Nell'ipotesi che il CdM dell'oggetto coincida con l'estremità inferiore dell'asta, e che si possano trascurare le sue dimensioni rispetto alla lunghezza ℓ dell'asta, l'equazione diventa

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{6M+2m}{6M+3m}}$$

Sitografia

Cannon, J.T., Dostrovsky, S. (1981): "*Danielis Bernoulli: Theoremata de oscillationibus corporum*" (traduzione dal latino all'inglese), in "The evolution of Dynamics – Vibration Theory from 1687 to 1742". Springer–Verlag
`https://archive.org/details/evolutionofdynam0000cann` (consultato il 6 luglio 2023)

"*Unit 15 Bessel Function – 15.7.1 Small Oscillations of a Hanging Chain*", pag. 49-51, eGyanKosh-a National Digital Repository
`https://egyankosh.ac.in/bitstream/123456789/19442/1/Unit-15.pdf` (consultato il 18 agosto 2023)

Verbin, Y. (2014): "*Boundary Conditions and Modes of the Vertically Hanging Chain*"
`https://arxiv.org/abs/1412.1846` (consultato il 17 luglio 2023)

Rajeev, S.G. (2017): *"Small Oscillations of the n-Pendulum and the "Hanging Rope" Limit 'n → ∞"*; in "PHY 235W Term Paper"
`https://www.pas.rochester.edu/ rrubenza/projects/RR_PHY235W_TermPaper.pdf` (consultato il 4 luglio 2023)