



PROBLEMA n. 1 – Particella su semisfera

Quesito n. 1.

Durante la discesa, fin quando è in contatto con la semisfera, la particella è sottoposta alla forza peso \vec{P} e alla reazione normale \vec{N} , schematizzate in figura 1.

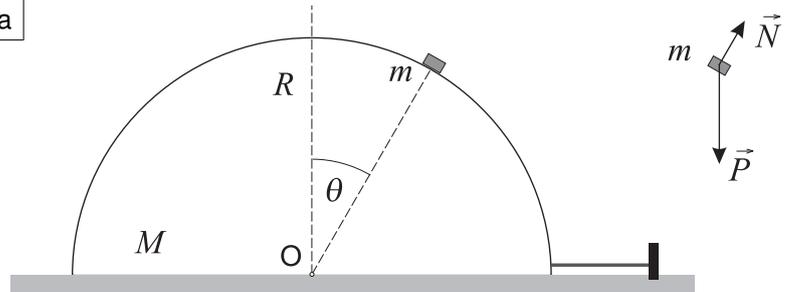


Figura 1

Quesito n. 2.

La componente radiale della forza risultante è

$$F_r = mg \cos \theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

dove v è la velocità con cui la particella scivola lungo la semisfera. Durante la discesa si conserva l'energia meccanica

$$mgR \cos \theta_0 = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{da cui} \quad \frac{mv^2}{R} = 2mg(\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Sostituendo nella prima e ricavando N si ottiene

$$N = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0).$$

La particella rimane in contatto con la semisfera fintantoché $N > 0$ ossia per

$$\cos \theta > \frac{2}{3} \cos \theta_0 \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{3}{2} \cos \theta_1 = \frac{3}{4} \quad \text{da cui} \quad \theta_0 = 41.4^\circ. \quad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{41.2^\circ \leq \theta_0 \leq 41.6^\circ}$$

Quesito n. 3.

Mentre la particella scivola giù, la semisfera è in equilibrio. Su di essa agiscono il suo peso \vec{P}_1 , la forza $-\vec{N}$ con cui la particella preme sulla semisfera, la tensione \vec{T} del cavo e la reazione del piano di appoggio \vec{N}_1 , come in figura 2. La componente orizzontale della forza risultante è $T - N \sin \theta = 0$ dato che la semisfera è in equilibrio; essendo $\cos \theta_0 \approx 1$, si ha

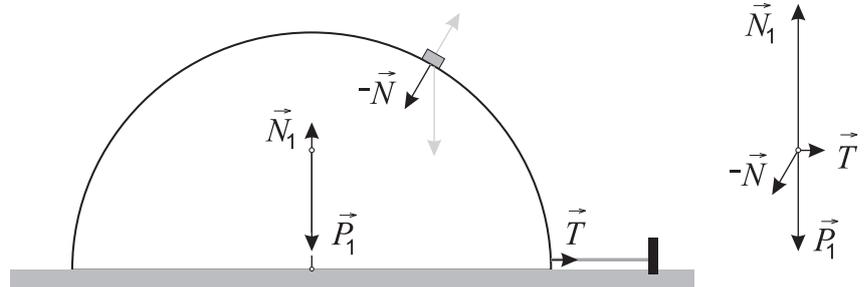


Figura 2

$$T = N \sin \theta = mg(3 \cos \theta - 2) \sin \theta.$$



Quesito n. 4.

In figura 3 è rappresentato il grafico completo di $T/mg = f(\theta) = (3 \cos \theta - 2) \sin \theta$.

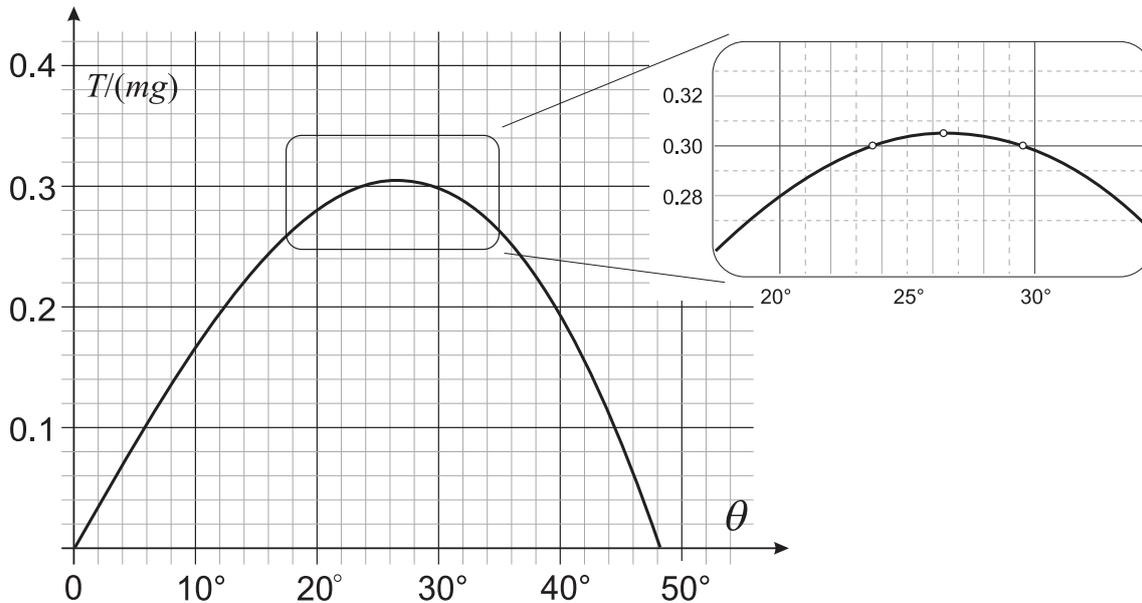


Figura 3

Seguendo la stessa traccia del quesito 2, essendo adesso $\cos \theta_0 \approx 1$, si determina l'angolo di distacco

$$3 \cos \theta - 2 = 0 \Rightarrow \theta_{\text{dist}} \approx 48.19^\circ.$$

La tensione è nulla per $\theta = 0$ quando la particella è sulla sommità della semisfera. Si annulla anche per $\theta = \theta_{\text{dist}}$, cioè quando la particella si stacca dalla semisfera.

Detto questo si può disegnare la scala sull'asse θ in cui ogni divisione corrisponde a 2° . Si vede quindi che la curva ha il massimo tra 23.5° e 29.5° . Pertanto, facendo la media tra questi due valori, il massimo si ha per

$$\theta_{T_{\text{max}}} = 26.5^\circ \quad \text{con un'incertezza di } 1^\circ. \quad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{25.5^\circ \leq \theta_{T_{\text{max}}} \leq 27.5^\circ}$$

La scala dell'asse delle ordinate si può trovare sostituendo $\theta \approx 24^\circ$ in $f(\theta)$: si ottiene 0.30. Questo determina che, sull'asse delle ordinate, ogni divisione corrisponde a 0.02. Leggendo il grafico il massimo della funzione sta tra 0.30 e 0.31 da cui si ricava

$$\frac{T}{mg} = 0.305 \quad \text{con un'incertezza di } 0.005. \quad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{0.300 \leq (T/mg)_{\text{max}} \leq 0.310}$$

Procedendo analiticamente, invece, si pone uguale a zero la derivata prima di $f(\theta)$.

$$f'(\theta) = \cos \theta (3 \cos \theta - 2) - 3 \sin^2 \theta = 6 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 3 = 0 \quad \text{da cui} \quad \cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{6}.$$

Essendo $0 \leq \theta \leq 48.19^\circ$ la soluzione negativa non è accettabile per cui il massimo della tensione si ha per

$$\theta = 26.73^\circ. \quad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{26.60^\circ \leq \theta_{T_{\text{max}}} \leq 26.90^\circ}$$

e il valore massimo della tensione in rapporto al peso della particella è $(T/mg)_{\text{max}} = 0.305$.

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{0.300 \leq (T/mg)_{\text{max}} \leq 0.310}$$

Quesito n. 5.

Al diagramma delle forze mostrato al punto 1., occorre aggiungere la tensione \vec{T} dovuta al filo che tiene la massa legata al vertice della semisfera, come in figura 4.

Dalle indicazioni si deduce che la forza \vec{F} può essere applicata alla semisfera in due versi opposti (vedi figure 4a e 4b).

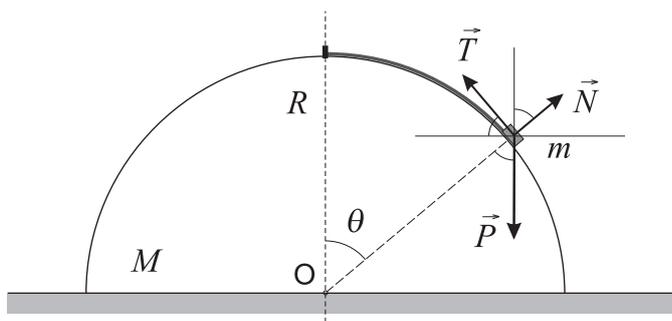


Figura 4

Nel primo caso (figura 4a), poiché la particella deve accelerare verso sinistra insieme alla semisfera, la tensione \vec{T} aumenta mentre la normale \vec{N} diminuisce finché si annulla; in quell'istante avviene il distacco.

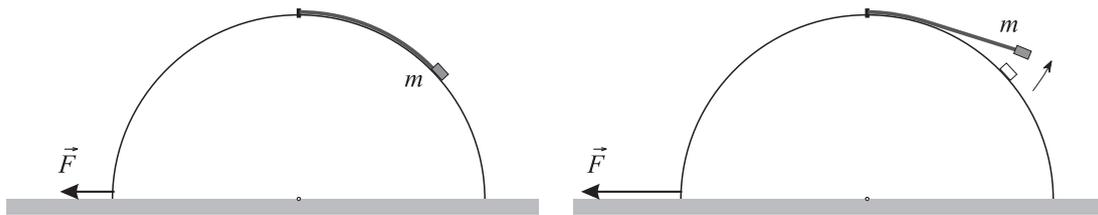


Figura 4a

Nel secondo caso (figura 4b) l'accelerazione della particella è verso destra e questo richiede che la normale \vec{N} cresca mentre la tensione \vec{T} diminuisce fino ad annullarsi; a questo punto la particella inizia a risalire.

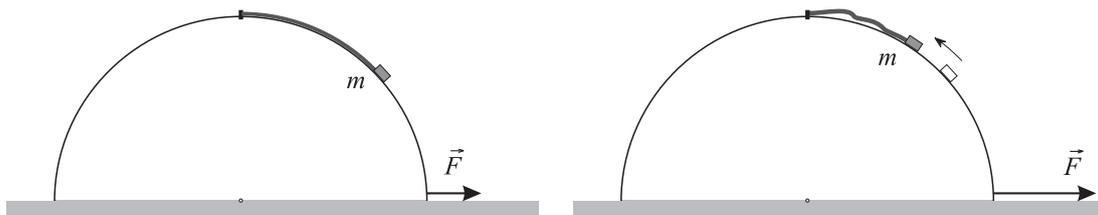


Figura 4b

Quesito n. 6.

Si analizza la prima situazione (figura 4a). Sulla particella agiscono la reazione vincolare \vec{N} , la tensione del filo \vec{T} e il peso \vec{P} .

Il sistema semisfera-particella a causa della forza \vec{F} subisce un'accelerazione orizzontale di modulo $a = F/(M + m)$ nello stesso verso della forza. Poiché la particella è appoggiata alla semisfera, la forza normale \vec{N} è rivolta sempre verso l'alto e la condizione $N = 0$ indica il venir meno del contatto (v. figura 5), per cui si ha

$$\begin{cases} T \sin \theta = mg \\ T \cos \theta = ma \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{g}{a} = g \frac{M + m}{F} \quad \text{e quindi}$$

$$F = \frac{(M + m) g}{\operatorname{tg} \theta}.$$

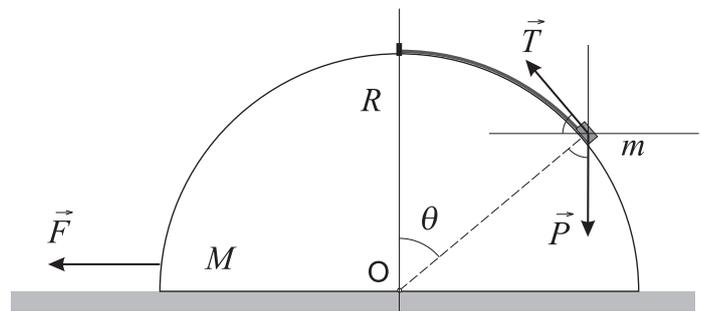


Figura 5

Quesito n. 7.

Nella seconda situazione (figura 4b) sono presenti le stesse forze e il modulo dell'accelerazione si scrive allo stesso modo. Affinché la particella cominci a risalire lungo la semisfera è necessario che la tensione sia zero, $T = 0$ (v. figura 6), pertanto

$$\begin{cases} N \sin \theta = ma \\ N \cos \theta = mg \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{g} = \frac{F}{g(M + m)} \quad \text{e quindi}$$

$$F = (M + m) g \operatorname{tg} \theta.$$

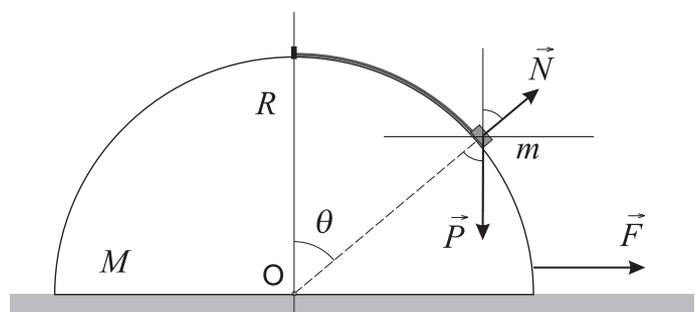


Figura 6

In maniera più formale, fissato un sistema di riferimento con l'asse x verso destra e l'asse y verso l'alto come in figura 7, la forza \vec{F} ha componente negativa nel caso della figura 4a e positiva nel caso della figura 4b. Sulla particella agiscono la reazione vincolare \vec{N} , la tensione del filo \vec{T} e il peso \vec{P} . Il sistema semisfera-particella, a causa della forza \vec{F} , subisce un'accelerazione orizzontale $a = F/(M + m)$ nello stesso verso della forza.

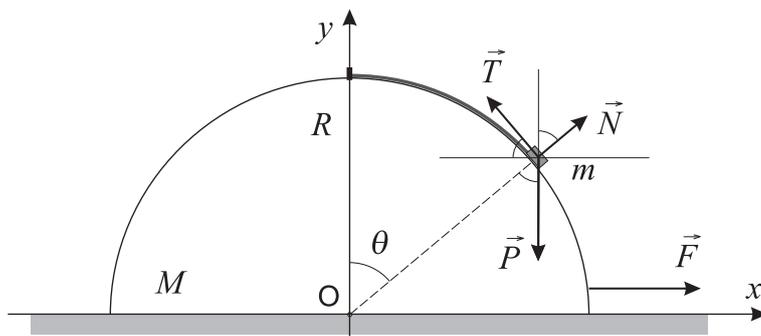


Figura 7

Si ha

$$\begin{cases} -T \cos \theta + N \sin \theta = ma \\ T \sin \theta + N \cos \theta = mg \end{cases} \quad \text{da cui si ricava} \quad \begin{cases} T = m \left(g \sin \theta - \frac{F}{M + m} \cos \theta \right) \\ N = m \left(g \cos \theta + \frac{F}{M + m} \sin \theta \right) . \end{cases}$$

Il distacco della particella dalla semisfera si ha quando $N = 0$ nella seconda equazione, ricavando

$$F = -\frac{(M + m)g}{\operatorname{tg} \theta} \quad \text{ossia la forza deve essere diretta verso sinistra.}$$

Se si vuole, invece, che la particella risalga lungo la semisfera si deve porre $T = 0$ nella prima equazione ricavando

$$F = (M + m)g \operatorname{tg} \theta \quad \text{con la forza diretta verso destra.}$$

Il problema può essere risolto anche nel riferimento della semisfera; si tratta di un sistema di riferimento non inerziale, essendo accelerato – rispetto a quello inerziale usato prima – con accelerazione $\vec{a} = \vec{F}/(M + m)$.

In questo riferimento, nei diagrammi delle forze agenti sulla particella va aggiunta la forza apparente d'inerzia $\vec{F}_i = -m\vec{a} = -\vec{F}m/(M + m)$, come mostrato nella successiva figura 8.

Così facendo le equazioni si scrivono allo stesso modo e dunque si ottengono – come ovvio – gli stessi risultati.

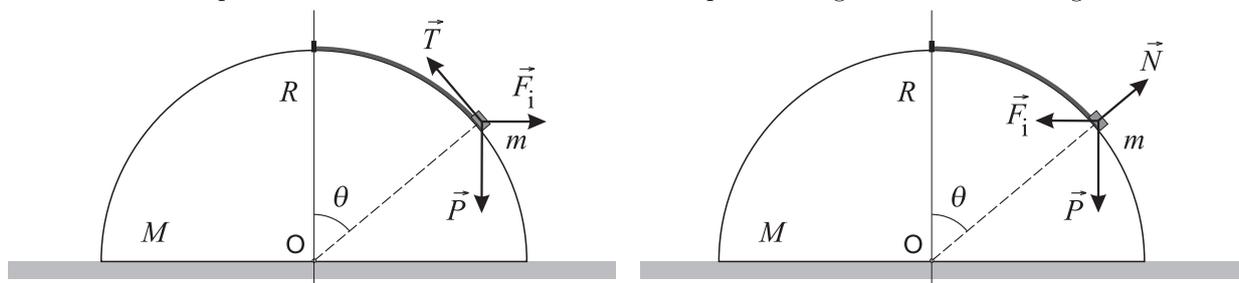


Figura 8

PROBLEMA n. 2 – Effetti di gravità e accelerazioni su un conduttore

Quesito n. 1.

Su un elettrone di conduzione interno al cilindro agiscono la forza elettrostatica $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ e la forza gravitazionale $\vec{F}_g = m\vec{g}$. Imponendo che le due forze diano somma nulla si ricava che

$$\vec{E} = \frac{m}{e} \vec{g}.$$

Quesito n. 2.

Essendo il campo elettrico verticale e diretto verso il basso, il potenziale V dipende solo dalla quota z e cresce verso l'alto; la differenza di potenziale tra due punti a quote z_1 e z_2 è data da $\Delta V = E(z_2 - z_1)$.

La differenza di potenziale massima è quindi tra due punti posti sulle due basi del cilindro e vale

$$\Delta V_{\max} = Eh = \frac{mgh}{e} = 5.576 \times 10^{-11} \text{ V.}$$

RIS \Rightarrow

$$5.564 \leq \Delta V_{\max} \leq 5.588 \quad [10^{-11} \text{ V}]$$

Quesito n. 3.

Il campo elettrico all'interno del conduttore è uniforme. Di conseguenza, il flusso del campo elettrico attraverso ogni superficie chiusa interamente contenuta nel volume del cilindro è nullo, e nulla è, per il teorema di Gauss, la carica racchiusa all'interno di tale superficie.

Essendo nulla la carica in ogni volume delimitato da una superficie chiusa, si può concludere che la densità di carica all'interno del conduttore è nulla in ogni punto.

Quesito n. 4.

Essendoci un campo elettrico all'interno del conduttore ed essendo nulla la densità di carica all'interno del conduttore, è necessario che le sorgenti del campo elettrico siano sulla superficie. È dunque presente una densità di carica superficiale.

Dato che il cilindro è globalmente neutro e che all'interno del cilindro la carica è nulla, anche la carica superficiale sarà globalmente nulla, pur essendoci localmente una densità di carica non nulla.

Infatti, poiché il campo elettrico è diretto verso il basso, deve essere presente una densità di carica superficiale positiva nella metà superiore del cilindro e negativa nella metà inferiore del cilindro.

Quesito n. 5.

Su un elettrone di conduzione interno al cilindro agisce una forza $\vec{F} = -e\vec{E}(r)$. Poiché il cilindro è in rotazione, la forza su un elettrone di conduzione è diretta verso l'asse del cilindro ed è perpendicolare all'asse stesso, mentre il campo elettrico ha stessa direzione ma verso opposto alla forza. Essendo il modulo dell'accelerazione centripeta a distanza r dall'asse pari a $\omega^2 r$, vale la relazione

$$e\vec{E}(r) = m\omega^2 \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{m}{e} \omega^2 \vec{r}.$$

Quesito n. 6.

Per trovare la densità di carica, data la simmetria del problema, si considera una superficie S cilindrica di altezza z e raggio $r < R$ centrata sull'asse del cilindro conduttore e si applica il teorema di Gauss:

$$\Phi_S = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}.$$

Il flusso attraverso le superfici di base è nullo, poiché il campo è parallelo ad esse. Il vettore area di un elemento infinitesimo della superficie laterale è in ogni punto parallelo al campo e su tutta la superficie il campo ha modulo $E(r) = (m/e)\omega^2 r$, quindi

$$\Phi_S(\vec{E}) = 2\pi r z E(r) = 2\pi \frac{m}{e} \omega^2 r^2 z.$$

La densità media di carica è data dal rapporto tra la carica Q_S e il volume che la contiene. Si ottiene

$$\langle \rho \rangle_S = \frac{Q_S}{\pi r^2 z} = \frac{2\pi(m/e)\omega^2 r^2 z \varepsilon_0}{\pi r^2 z} = 2\varepsilon_0 \frac{m}{e} \omega^2.$$

Poiché la densità di carica puntuale non può dipendere dalla coordinata angolare, per ragioni di simmetria, e la densità media non dipende da altezza e raggio del cilindro, la densità puntuale è uniforme e vale proprio

$$\rho = 2\varepsilon_0 \frac{m}{e} \omega^2.$$

Quesito n. 7.

Poiché il cilindro è globalmente neutro, e l'interno è carico positivamente, deve essere presente una densità di carica superficiale in modo che la carica totale sulla superficie sia opposta a quella presente all'interno. Pertanto si ha

$$Q_{\text{sup}} = -Q_{\text{int}} = -\rho\pi R^2 h = -2\pi R^2 h \varepsilon_0 \frac{m}{e} \omega^2.$$

Quesito n. 8.

Posto a zero il potenziale sull'asse del cilindro, si può ottenere il potenziale a distanza r per integrazione del campo elettrico

$$V(r) - V(0) = -\int_0^r E(r) dr = -\frac{1}{2} \frac{m}{e} \omega^2 r^2.$$

Alternativamente, poiché la forza ha modulo proporzionale alla distanza dall'asse ma verso uscente dall'asse si può ottenere l'energia potenziale di un elettrone per analogia al caso di una forza elastica, cambiando il segno

$$U(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \Rightarrow V(r) = \frac{U(r)}{e} = -\frac{1}{2}\frac{m}{e}\omega^2 r^2.$$

La massima differenza di potenziale si ha tra l'asse del cilindro e la sua superficie laterale e vale in modulo

$$\Delta V_{\max} = \frac{1}{2}\frac{m}{e}\omega^2 R^2 \quad \text{da cui} \quad \omega = \sqrt{\frac{2e\Delta V_{\max}}{mR^2}} \Rightarrow \nu_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2e\Delta V_{\max}}{mR^2}}.$$

Inserendo i dati forniti si ottiene

$$\nu_1 = 1.888 \times 10^6 \text{ Hz}.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{1.882 \leq \nu_1 \leq 1.894 \quad [10^6 \text{ Hz}]}$$

Quesito n. 9.

Poiché il cilindro ruota su se stesso è presente una corrente di cariche positive distribuite lungo tutto il cilindro e una di cariche negative disposte sul bordo.

Poiché la porzione di cilindro di altezza δ si può considerare globalmente neutra, si avrà, detta σ la densità di carica superficiale,

$$\rho\pi R^2\delta = -\sigma 2\pi R\delta \Rightarrow \sigma = -\rho\frac{R}{2}.$$

Il campo magnetico generato dalla carica rotante è di tipo solenoidale, diretto parallelamente all'asse z , come quello dato da una successione infinita di solenoidi coassiali che riempiono tutto il volume del cilindro. Su una superficie a distanza r dall'asse del cilindro il campo è determinato dai solenoidi esterni ad essa; poiché il campo magnetico all'interno di un singolo solenoide (e lontano dai bordi come in questo caso) è uniforme, il contributo dovuto a ciascun solenoide esterno non dipende dal suo raggio; si può quindi pensare che tutta la corrente che scorre nei punti a distanza maggiore di r equivalga a un'unica corrente superficiale $I(r)$: questa è data dalla carica totale $Q(r)$ contenuta nella corona cilindrica di altezza δ e raggio tra r e R compreso, diviso il tempo che impiega a transitare attraverso una sezione, cioè un periodo T di rotazione $I(r) = Q(r)/T = Q(r)\omega/(2\pi)$.

Poiché le densità di carica di volume e di superficie sono uniformi si ha

$$Q(r) = \rho(\pi R^2 - \pi r^2)\delta + \sigma 2\pi R\delta = -\rho\pi r^2\delta.$$

Per analogia con un solenoide reale si supponga che nell'altezza considerata ci siano N spire; allora la corrente per ogni spira è $i = I/N$ e la densità di spire è $n = N/\delta$ e il campo magnetico è

$$B(r) = \mu_0 n i = \frac{\mu_0 I(r)}{\delta} = \frac{\mu_0 Q(r)\omega}{2\pi\delta} = -\frac{\mu_0 \rho r^2 \omega}{2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{m}{e} r^2 \omega^3.$$

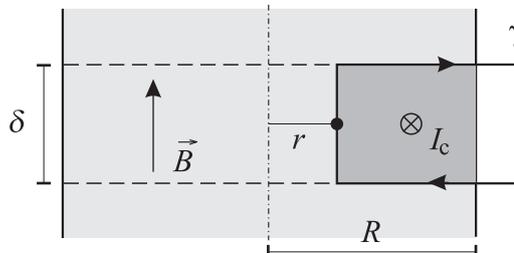
Il segno meno indica che il campo ha verso opposto a quello della velocità angolare.

Allo stesso risultato si arriva con l'uso del teorema di Ampère.

Se si considerano solo punti nella zona centrale del cilindro molto lungo rispetto al raggio, si possono trascurare gli effetti di bordo e considerare che, per simmetria, il campo magnetico ha solo componente assiale. Inoltre, poiché ogni superficie di corrente solenoidale dà campo magnetico nullo al suo esterno, si può porre $\vec{B} = 0$ nei punti esterni al cilindro.

Allora, per il teorema di Ampère, la circuitazione di \vec{B} sulla curva γ mostrata in figura dà

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r)\delta = \mu_0 I_c.$$



essendo I_c la corrente concatenata alla curva; questa è data dalla carica che attraversa la superficie rettangolare della curva nel tempo di un periodo di rotazione, ovvero $Q(r)/T$. Dunque

$$B(r) = \frac{\mu_0 Q(r)}{\delta T} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{m}{e} r^2 \omega^3.$$

Si confronta ora la forza di Lorentz su un elettrone dovuta a questo campo con quella elettrica dovuta al campo elettrico

$$\frac{F_L}{F_E} = \frac{eB_r\omega r}{eE_r} = \frac{\mu_0\varepsilon_0(m/e)\omega^4 r^3}{(m/e)\omega^2 r} = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 r^2.$$

Ricordando che $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, e detta $v = \omega r$ la velocità lineare degli elettroni in rotazione, si ha

$$\frac{F_L}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}.$$

Quindi, per rotazioni non relativistiche, il contributo della forza di Lorentz autoindotta è trascurabile. Il valore massimo del rapporto si ha sul bordo del cilindro dove, per $v = v_1$ si ha

$$\frac{F_L}{F_E} = \frac{\omega_1^2 R^2}{c^2} = \frac{2e\Delta V_{\max}}{mc^2} = 3.914 \times 10^{-6}.$$

RIS \Rightarrow

$$3.906 \leq F_L/F_E \leq 3.922 \quad [10^{-6}]$$

PROBLEMA n. 3 – Misure interferometriche

Quesito n. 1.

Al rivelatore arrivano due onde, quella diretta e quella riflessa dallo specchio. La seconda percorre una distanza maggiore di $2s$ rispetto alla prima. Inoltre, nella riflessione essa subisce un ulteriore sfasamento pari a π .

Sul rivelatore l'onda risultante è la sovrapposizione delle due onde, ossia

$$E(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + 2\varphi) \quad \text{con} \quad 2\varphi = 2ks + \pi.$$

Ponendo $\alpha = kx - \omega t + 2\varphi$ e $\beta = kx - \omega t$ e applicando la formula di prostaferesi ricordata nel testo si ottiene

$$E(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + 2\varphi) = A \cos(\varphi) \sin(kx - \omega t + \varphi); \quad \varphi = ks + \pi/2.$$

La potenza istantanea incidente sul rivelatore, proporzionale al quadrato di $E(x, t)$, risulta

$$P(x, t) \propto A^2 \sin^2(2\pi s/\lambda) \sin^2(kx - \omega t + \varphi)$$

e poiché la media temporale della funzione $\sin^2(kx - \omega t + \varphi)$ è pari a $1/2$ (vedi formula [M2]) l'irradianza si scrive come

$$I(s) = C \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}s\right).$$

Quesito n. 2.

Detto $\Delta t = 8.437$ s il tempo dello spostamento dello specchio, questo ha una velocità

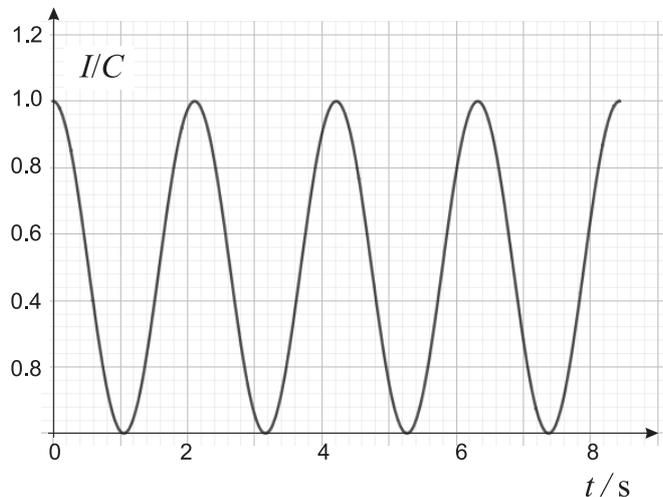
$$v = \frac{2\lambda}{\Delta t} = 150 \text{ nm s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad s(t) = vt = \frac{2\lambda}{\Delta t} t$$

da cui, essendo

$$\varphi = ks = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2\lambda}{\Delta t} t = \frac{4\pi t}{\Delta t},$$

in analogia al quesito 1 (ma adesso senza il termine $\pi/2$), si ha

$$\frac{I(t)}{C} = \cos^2\left(\frac{4\pi}{\Delta t} t\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{8\pi}{\Delta t} t\right) \right] \quad \text{il cui grafico è mostrato qui sopra.}$$



Quesito n. 3.

Lo specchio si sta muovendo con velocità $v = 2\lambda/\Delta t = 150 \text{ nm s}^{-1}$ ed è come se la sorgente (virtuale) si muovesse, allontanandosi dal rivelatore a velocità doppia, per cui la frequenza dell'onda ricevuta è

$$f' = f \frac{c}{c + 2v} \quad \Rightarrow \quad \delta f = f - f' = f \frac{2v}{c + 2v} \approx f \frac{2v}{c};$$

la variazione relativa risulta

$$\frac{\delta f}{f} \approx \frac{2v}{c} = \frac{4\lambda}{c\Delta t} = 10^{-15}.$$

Lo strumento di misura dovrebbe avere una risoluzione relativa minore di almeno un ordine di grandezza rispetto a questa variazione, per cui si può dire con certezza che l'effetto Doppler non è rilevabile.

Quesito n. 4.

Sullo schermo incidono adesso 4 onde, ovvero 2 coppie aventi ciascuna 2 onde di una stessa frequenza, sfasate tra loro per il tratto $2s$. L'irradianza è data dalla media temporale del quadrato della somma delle 4 componenti; tutto questo può scriversi in forma più semplice.

Usando l'espressione trovata al punto 1. per la somma di due onde sfasate, calcolate nello stesso punto fissato x , adesso si ha

$$E(t) = A_1 \cos(k_1 s) \sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(k_2 s) \sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{con} \\ \varphi_i = k_i s, \quad i = 1, 2.$$

La potenza istantanea è data dal quadrato di E :

$$P(t) = A_1^2 \cos^2(k_1 s) \sin^2(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + A_2^2 \cos^2(k_2 s) \sin^2(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2) + \\ + 2A_1 A_2 \cos(k_1 s) \cos(k_2 s) \sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) \sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2).$$

La media temporale di $P(t)$ si ottiene subito utilizzando le formule [M1] e [M2] (v. nota ⁽³⁾ a pag. 66); in definitiva l'irradianza si scrive, in termini di s , come

$$I = \frac{1}{2} A_1^2 \cos^2(k_1 s) + \frac{1}{2} A_2^2 \cos^2(k_2 s) \quad \text{oppure, utilizzando l'equivalenza [T1],}$$

$$I = C_1 [1 + \cos(2k_1 s)] + C_2 [1 + \cos(2k_2 s)] = \\ = C_1 + C_2 + [C_1 \cos(2k_1 s) + C_2 \cos(2k_2 s)].$$

Infine, in termini temporali, spostando progressivamente lo schermo a velocità v ($s = vt$), si ottiene la seguente espressione il cui grafico è quello dato nel testo.

$$I = C_1 + C_2 + \left[C_1 \cos(2k_1 v t) + C_2 \cos(2k_2 v t) \right] = \\ = C_1 + C_2 + \left[C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_2} t\right) \right],$$

avendo posto

$$2k_i v = 2 \frac{2\pi}{\lambda_i} v = \frac{2\pi}{T_i} \quad \text{da cui si ricava} \quad \lambda_i = 2v T_i \quad \text{per} \quad i = 1, 2.$$

Il grafico mostra appunto la sovrapposizione di due funzioni sinusoidali con periodi diversi; quella di periodo maggiore presenta 2 oscillazioni in circa 25 s, quindi

$$T_1 \approx 12.5 \text{ s} \quad \text{da cui} \quad \lambda_1 \approx 3750 \text{ nm}.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{3720 \leq \lambda_1 \leq 3780 \text{ [nm]}}$$

mentre la seconda presenta 16 oscillazioni in circa 23 s da cui

$$T_2 \approx 1.44 \text{ s} \quad \text{da cui} \quad \lambda_2 \approx 432 \text{ nm}.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{428 \leq \lambda_2 \leq 436 \text{ [nm]}}$$

Quesito n. 5.

Secondo il modello atomico di Bohr l'energia del livello n -simo vale

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad \text{per} \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad \text{dove} \quad E_1 = -13.6 \text{ eV} = -2.179 \times 10^{-18} \text{ J}.$$

è l'energia del livello fondamentale.

Il fotone prodotto nella prima transizione dal livello n_1 al livello 5 ha un'energia ΔE_1 pari a

$$\Delta E_1 = E_{n_1} - E_5 = E_1 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{25} \right) = \frac{hc}{\lambda_1} \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} = \frac{hc}{E_1 \lambda_1} + \frac{1}{25} = \frac{25 hc + E_1 \lambda_1}{25 E_1 \lambda_1}$$

da cui

$$n_1 = \sqrt{\frac{25 E_1 \lambda_1}{25 hc + E_1 \lambda_1}} \approx 7.982 \Rightarrow n_1 = 8.$$

Nella seconda transizione si ha invece

$$\Delta E = E_5 - E_{n_2} = E_1 \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{n_2^2} \right) = \frac{hc}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{1}{n_2^2} = \frac{E_1 \lambda_2 - 25 hc}{25 E_1 \lambda_2}$$

da cui

$$n_2 = \sqrt{\frac{25 E_1 \lambda_2}{E_1 \lambda_2 - 25 hc}} \approx 1.996 \Rightarrow n_2 = 2.$$