Associazione per l'Insegnamento della Fisica

PROGETTO AIF OLIMPIADI

OLIMPIADI DI FISICA 2012

GARA DI 2° LIVELLO
VENERDI' 10
FEBBRAIO 2012

Soluzioni

Quesiti

QUESITO n. 1

Siano v e ηv (con $\eta = 1.1$) le velocità dei due ciclisti. Il più veloce raggiunge l'altro quando avrà percorso mezzo giro in più dell'altro, ovvero al tempo t per cui

$$\eta vt - vt = \pi R \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi R}{(\eta - 1)v}$$

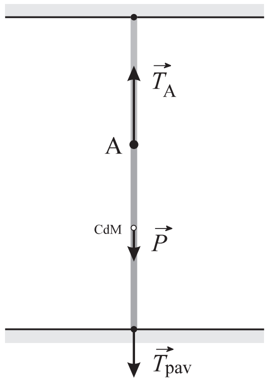
Il percorso fatto dal più veloce è $\quad L = \eta vt = \dfrac{\eta}{\eta - 1}\pi R \quad$ pari a giri $\quad N = \dfrac{L}{2\pi R} = \dfrac{\eta}{2(\eta - 1)}$

Nel caso in esame risultano 5 giri e mezzo.

Soluzione alternativa

Nel tempo in cui il ciclista più lento percorre 10 giri, quello più veloce ne percorre 11 e quindi guadagna un giro; dovendo recuperare sul ciclista più lento solo mezzo giro, basteranno 5 giri e mezzo.

QUESITO n. 2



Consideriamo il tratto di cavo tra il punto A e il pavimento: la sua lunghezza, L, è evidentemente 9.11 m. Le forze che agiscono su questo tratto di cavo sono le tensioni ai due estremi e il peso. La condizione di equilibrio si scrive: $T_A = T_{pav} + P$.

Poiché il peso del tratto di cavo è:

$$P = mg = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 L\,\rho g = 40\,\text{N} \qquad \text{e la tensione nel punto A risulta } 400\,\text{N}\,.$$

QUESITO n. 3

Sia E_0 l'energia richiesta ed f la frazione di atomi decaduti rispetto al numero iniziale. L'energia emessa durante tutto il processo è pari a

$$E = fn_0E_0 \quad \text{da cui otteniamo} \quad E_0 = \frac{E}{fn_0}$$

Nel nostro caso sono trascorse ovviamente tre emivite e quindi

$$f = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} \quad \text{per cui} \quad E_0 = 8 \times 10^{-13}\,\text{J}$$

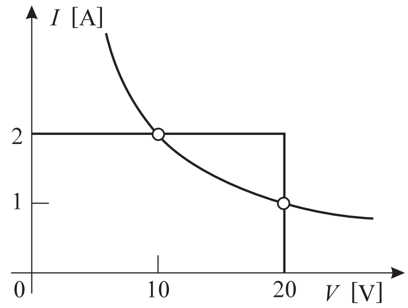
QUESITO n. 4

Ad ogni disco sono applicati due momenti dovuti alla forza di contatto e alla forza sul rocchetto; le forze di contatto (F_c) sono uguali in modulo (e opposte) ma i corrispondenti momenti sono diversi. Per l'equilibrio del sistema il momento risultante su ciascun disco è nullo: si ha quindi

$$Fr = F_c R \quad \text{e} \quad Mgr = F_c \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad F\frac{r}{R} = Mg\frac{2r}{R} \quad \Rightarrow \quad F = 2Mg$$

QUESITO n. 5

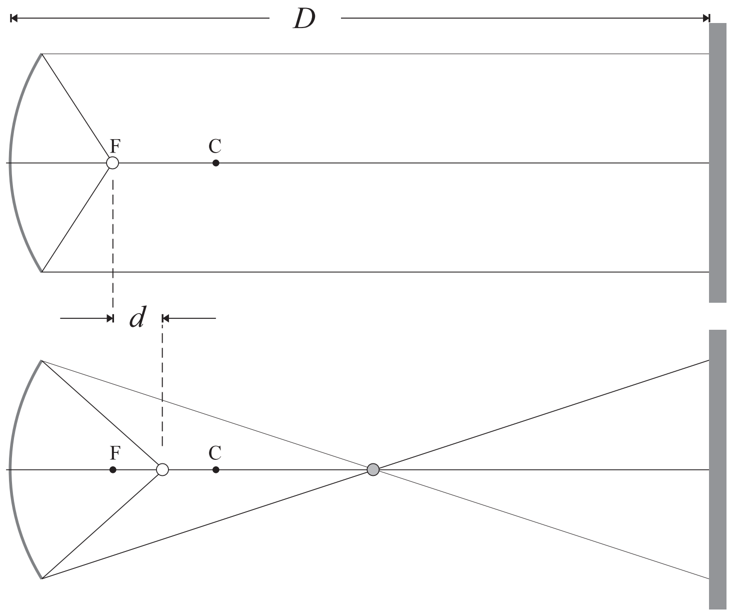
La tensione V, ai capi della batteria cui viene collegata la resistenza R, e la corrente I erogata devono soddisfare la seguente equazione $VI = P = 20\,\mathrm{W}$. La coppia di valori V ed I deve quindi soddisfare questa equazione ($VI = \mathrm{cost}$) e la relazione caratteristica tensione-corrente della batteria; i corrispondenti punti in figura sono quelli di intersezione tra la curva caratteristica e il grafico della stessa equazione. Si ottengono così le coppie $(V_1, I_1) = (10\,\mathrm{V}, 2\,\mathrm{A})$ e $(V_2, I_2) = (20\,\mathrm{V}, 1\,\mathrm{A})$. I due valori di R utilizzabili sono, rispettivamente, $R_1 = V_1/I_1 = 5\,\Omega$ e $R_2 = V_2/I_2 = 20\,\Omega$.



NOTA per i correttori: *Se lo studente trova e scrive una sola delle due soluzioni va assegnato un solo punto.*

QUESITO n. 6

Le due posizioni in cui la macchia luminosa formata sullo schermo dalla luce riflessa dallo specchio ha le stesse dimensioni dello stesso sono mostrate nelle figure seguenti.



NOTA: Nelle figure l'apertura dello specchio, cioè il suo diametro trasversale, è esagerato per chiarezza grafica.

Nella prima figura la lampadina è posta nel fuoco dello specchio (quindi la sua posizione è $p_1 = f$): i raggi riflessi sono paralleli. Ricordiamo che per gli specchi sferici la distanza focale f è $R/2$: nel nostro caso dunque $f = 0.60\,\mathrm{m}$.

Nella seconda figura, i raggi riflessi sono focalizzati in un punto tra specchio e schermo. Se si vuole che la macchia luminosa sullo schermo abbia le stesse dimensioni trasversali dello specchio, questo punto dev'essere evidentemente a metà strada tra specchio e schermo (quindi la sua posizione è $q_2 = D/2$), con D misurato dal "vertice" dello specchio, come si vede in figura.

La legge dei punti coniugati diventa quindi:

$$\frac{1}{p_2}+\frac{2}{D}=\frac{1}{f} \quad \text{Da questa ricaviamo:} \quad p_2=\frac{fD}{D-2f}$$

Sappiamo che:

$$p_2-p_1=d \quad \Rightarrow \quad \frac{fD}{D-2f}-f=d \quad \text{da cui} \quad D=2f\left(1+\frac{f}{d}\right)=3.0\,\mathrm{m}$$

QUESITO n. 7

La goccia sta scendendo a velocità costante (detta *velocità limite* v_L), quindi la risultante delle forze è nulla. Sulla goccia agiscono due forze (*) uguali in modulo e direzione e opposte in verso, la forza peso (diretta verso il basso) e la forza frenante (diretta verso l'alto). Applicando ad essa la seconda legge della dinamica si ha:

$$\vec{P}+\vec{F}=0 \quad \Rightarrow \quad mg-kv_\mathrm{L}^2=0 \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{L}^2=\frac{mg}{k}$$

L'energia cinetica vale $\quad E=\frac{1}{2}mv_\mathrm{L}^2=\frac{m^2g}{2k}$

(*) *NOTA: In realtà è presente anche una* spinta idrostatica *dovuta all'aria, ma questa può essere trascurata dato che la densità dell'aria è molto minore di quella dell'acqua.*

QUESITO n. 8

Poiché il campo elettrico è uniforme, le superfici equipotenziali, perpendicolari alle linee di forza del campo elettrico, sono dei piani paralleli tra loro. Tali piani sono perpendicolari al piano del foglio e lo intersecano lungo linee ancora perpendicolari al campo. I punti D, B e P sono equipotenziali. I punti A e C giacciono, invece, su due superfici equipotenziali diverse e la linea che congiunge questi due punti è perpendicolare alla linea equipotenziale per B, D e P. Il campo elettrico è il gradiente del potenziale cambiato di segno e, in questo caso semplice, è un vettore che ha la direzione e il verso di $\overrightarrow{CA}$ e modulo

$$E=\frac{|V_\mathrm{C}-V_\mathrm{A}|}{\sqrt{2}\,\ell}=21\,\mathrm{Vm^{-1}}$$

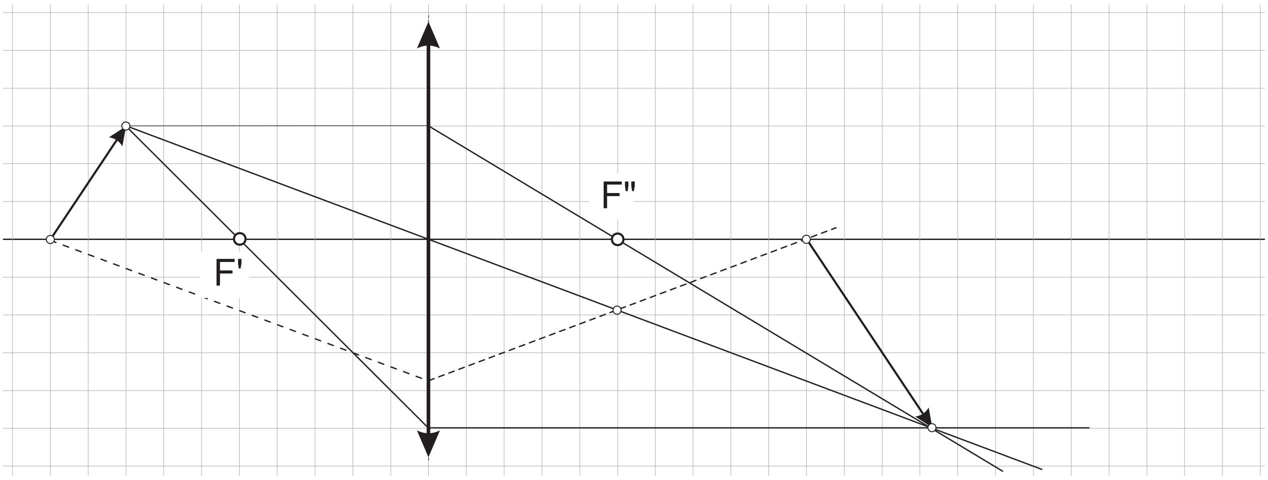
QUESITO n. 9

Mentre il motore funziona, l'energia trasferita dall'alimentatore viene spesa, in parte per sollevare la massa, in parte per riscaldare il motore. Quando il motorino non è alimentato, la massa, ritornando a terra, fa un lavoro sul motorino continuando a riscaldarlo. Se si analizza il processo nella sua totalità, il lavoro fatto dal motorino per sollevare il peso è uguale a quello fatto dal peso sul motorino quando ritorna a terra. Supponendo ora che l'energia complessivamente fornita al motorino (pari quindi a $i\,V\,t$) si converta tutta in calore, per definizione di capacità termica ($Q=C\,\Delta T$), si può determinare la variazione di temperatura del motorino elettrico: $\Delta T=i\,V\,t/C=3.5\,\mathrm{K}$

QUESITO n. 10

Come detto nel testo, si può dimostrare che l'immagine di un segmento (l'oggetto-freccia) è ancora un segmento; la dimostrazione non è richiesta e per tracciare l'immagine è sufficiente considerare gli estremi del segmento oggetto.

Si può procedere per via puramente geometrica oppure calcolando prima le posizioni delle immagini dei due punti.



Per via geometrica, l'immagine della punta della freccia si ottiene dall'intersezione di almeno due dei tre raggi tracciati a tratto continuo, quelli passanti per i fuochi e quello per il centro della lente. L'immagine del punto alla base della freccia è certamente sull'asse ottico e per individuarla basta quindi solo un altro raggio indicato dalla linea tratteggiata; per determinare come questo si propaga al di là della lente basta pensare che questo appartiene ad un fascio di raggi paralleli e inclinati rispetto all'asse ottico, i quali convergono sul secondo piano focale: se la direzione del fascio è quella del raggio già tracciato prima e passante per il centro della lente, si determina facilmente il punto di convergenza (mostrato in figura sul secondo piano focale) e l'immagine della base della freccia.

Per via algebrica l'immagine si può ottenere dall'equazione dei punti coniugati applicata ai due punti estremi della freccia.

Notando che il punto sull'asse ottico si trova a distanza $p = 10$ quadretti dal centro della lente corrispondente a $2f$ (dalla figura si ricava che $f = 5$ quadretti), avremo che la sua posizione sarà in

$$q = \frac{pf}{p-f} = 10\,\text{quadretti}$$

sempre sull'asse ottico.

La proiezione della punta sull'asse ottico si trova a $p = 8$ quadretti da cui si ricava la proiezione della sua immagine sull'asse ottico in

$$q = \frac{8 \times 5}{3} = \frac{40}{3} \approx 13.3\,\text{quadretti}$$

mentre la sua distanza dallo stesso asse vale $h = 3$ quadretti che corrisponde nell'immagine ad

$$h' = -\frac{q}{p}h = -5\,\text{quadretti}$$

il cui segno indica l'ovvio fatto che l'immagine appare capovolta.

NOTA per i correttori: *Non vengono attribuiti punti allo studente che non costruisca la posizione di entrambi gli estremi dell'immagine.*

Problemi

PROBLEMA n. 1 – Esperimento spaziale

Quesito n. 1.
Per la terza legge di Keplero, detti r e T raggio e periodo dell'orbita circolare, si ha $r^3/T^2 = \text{cost}$ per cui, indicando con "g" e "s" i dati relativi al satellite geostazionario e alla sonda spaziale risulta

$$\frac{r_\mathrm{g}^3}{T_\mathrm{g}^2} = \frac{r_\mathrm{s}^3}{T_\mathrm{s}^2} \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{s} = \left(\frac{r_\mathrm{s}}{r_\mathrm{g}}\right)^{3/2} T_\mathrm{g} \approx 103\,\mathrm{min}$$

Ricordare che il raggio dell'orbita è $r = R_\mathrm{T} + h$ (raggio della Terra più quota rispetto alla superficie).

Quesito n. 2.
La componente di velocità parallela all'orbita della sonda deve essere uguale a quella della sonda stessa, ma in direzione opposta; la componente perpendicolare è invece v_0

Poiché la prima vale $v_\mathrm{s} = 2\pi r_\mathrm{s}/T_\mathrm{s} \approx 7.4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, l'angolo α sarà dato da

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_\perp}{v_\parallel} = -\frac{v_0}{v_\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 169^\circ$$

Quesito n. 3.

Il modulo della velocità relativa alla stazione vale $\quad v_\mathrm{r} = \sqrt{v_0^2 + v_\mathrm{s}^2} \approx 7.6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

Quesito n. 4.
Per la conservazione dell'energia, detta K l'energia cinetica ed essendo l'energia potenziale $U(r) = -GM_\mathrm{T}\,m/r$, con lo zero preso all'infinito, si ha

$$K_\mathrm{ini} + U_\mathrm{ini} = K_\mathrm{fin} + U_\mathrm{fin} \quad \Rightarrow \quad K_\mathrm{fin} = K_\mathrm{ini} + U_\mathrm{ini} - U_\mathrm{fin}$$

ovvero, posto che h rappresenti il limite superiore (convenzionale) dell'atmosfera, ed essendo $g = GM_\mathrm{T}/R_\mathrm{T}^2$,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \left(\frac{GM_\mathrm{T}\,m}{R_T + h} - \frac{GM_\mathrm{T}\,m}{R_\mathrm{T} + h_\mathrm{s}}\right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + gmR_\mathrm{T}^2\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_\mathrm{T} + h_\mathrm{s}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + gm\frac{R_\mathrm{T}^2}{(R_T + h)(R_\mathrm{T} + h_\mathrm{s})}(h_\mathrm{s} - h) \approx \frac{1}{2}mv_0^2 + gm(h_\mathrm{s} - h)$$

NOTA: *Usando l'espressione approssimata dell'energia potenziale ($\Delta U = mg\Delta h$) si commette un errore maggiore del 6 %, superiore a quello dovuto alle incertezze sui dati, pari a circa l'1 %. Questa soluzione è quindi ancora accettabile, ma ottiene un punteggio ridotto.*

In definitiva si ricava

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\frac{R_\mathrm{T}^2(h_\mathrm{s} - h)}{(R_T + h)(R_\mathrm{T} + h_\mathrm{s})}} = 4.16\,\mathrm{km\,s^{-1}} \quad \text{oppure} \quad v \approx \sqrt{v_0^2 + 2g(h_\mathrm{s} - h)} = 4.42\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

PROBLEMA n. 2 – Calore e lavoro in camera doppia

Quesito n. 1.

L'ambiente a destra è termicamente isolato, dunque il gas presente subisce una compressione adiabatica

$$pV^\gamma = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{27}{8} p_0 V_\text{d}^\gamma = p_0 V_0^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_\text{d} = \frac{4}{9} V_0$$

dove il pedice "d" (e più avanti "s") si riferisce all'ambiente di destra (e rispettivamente di sinistra).

Di conseguenza dalla legge di stato dei gas perfetti

$$T_\text{d} = \frac{p_\text{d} V_\text{d}}{nR} = \frac{27p_0/8 \times 4V_0/9}{nR} = \frac{3}{2} T_0$$

Quesito n. 2.

Essendo $C_p/C_v = 3/2$ e ricordando che $C_p = C_v + R$, si ha $C_v = 2R$.

Dal primo principio della termodinamica, considerando che durante la trasformazione adiabatica non viene scambiato calore, si ha

$$\mathcal{L} = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = -nC_v \Delta T = -nC_v \left(\frac{3}{2} T_0 - T_0 \right) = -\frac{1}{2} n C_v T_0 = -nRT_0$$

Soluzione alternativa

Il volume dell'ambiente di destra passa da V_0 a $4V_0/9$ e il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto sul gas durante la trasformazione adiabatica vale

$$\mathcal{L} = \int_{V_0}^{4V_0/9} p dV = p_0 V_0^\gamma \int_{V_0}^{4V_0/9} V^{-\gamma} dV = p_0 V_0^\gamma \frac{1}{-\gamma + 1} V^{-\gamma+1} \Big|_{V_0}^{4V_0/9} = -p_0 V_0 = -nRT_0$$

Quesito n. 3.

Al termine della trasformazione, il volume di sinistra vale

$$V_\text{s} = V_0 + \left(V_0 - \frac{4}{9} V_0 \right) = \frac{14}{9} V_0$$

e nei due ambienti vi è la stessa pressione, pertanto, dalla legge di stato dei gas perfetti, la temperatura di sinistra vale

$$T_\text{s} = \frac{p_\text{s} V_\text{s}}{nR} \quad \Rightarrow \quad T_\text{s} = \frac{27}{8} p_0 \frac{14}{9} V_0 \frac{T_0}{p_0 V_0} = \frac{21}{4} T_0$$

Quesito n. 4.

Il gas presente nell'ambiente di sinistra riceve calore dall'esterno ed esegue lavoro sull'ambiente di destra; il lavoro compiuto dal gas di sinistra è in modulo uguale a quello assorbito dal gas di destra. Dal primo principio della termodinamica

$$Q = \Delta U + \mathcal{L} = nC_v \left(\frac{21}{4} T_0 - T_0 \right) + \frac{1}{2} n C_v T_0 = \frac{19}{4} n C_v T_0 = \frac{19}{2} nRT_0$$

PROBLEMA n. 3 – Come accendere una lampadina

Quesito n. 1.

Si tratta di un partitore di tensione. Indicando con V_0 la d.d.p. nominale di 12 V, si ha $V/(R_1+R_2) = V_0/R_2$, ovvero $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{(V-V_0)}{V_0} = 3 \quad \Rightarrow \quad R_2 = \dfrac{V_0}{(V-V_0)} R_1 = R_1/3 = 5.0\,\Omega$

Quesito n. 2.

La resistenza R della lampadina è legata alla potenza nominale W_0 di 20 W e alla d.d.p. nominale di alimentazione V_0 dalla relazione $W_0 = V_0^2/R$, quindi $R = V_0^2/W_0 = 7.2\,\Omega$. La resistenza del parallelo fra R_2 e R quando la lampadina è inserita è $R_\mathrm{p} = R_2R/(R_2+R) = 3.0\,\Omega$, quindi la d.d.p. ai capi della lampadina, data - analogamente al caso precedente - da $V/(R_1+R_\mathrm{p}) = V_\mathrm{p}/R_\mathrm{p}$, risulta

$$V_\mathrm{p} = \frac{VR_\mathrm{p}}{R_1+R_\mathrm{p}} = \frac{VR_2R}{R_1R+R_2R+R_1R_2} = 7.9\,\mathrm{V}$$

La potenza effettivamente assorbita risulta allora

$$\frac{V_\mathrm{p}^2}{R} = \left(\frac{VR_2}{R_1R+R_2R+R_1R_2}\right)^2 R = W_0\left(\frac{V_0V}{V_0V+R_1W_0}\right)^2 = 8.6\,\mathrm{W}$$

Quesito n. 3.

Perché la lampadina assorba la potenza nominale deve circolarvi una corrente $I_0 = W_0/V_0$ e fra i punti A e B ci deve essere una d.d.p. V_0. Le correnti nelle due resistenze sono rispettivamente

$$I_1 = \frac{V-V_0}{R_1} \quad \text{e} \quad I_2 = I_1 - I_0 = \frac{V-V_0}{R_1} - \frac{W_0}{V_0} = \frac{(V-V_0)V_0 - R_1W_0}{R_1V_0} \quad \text{da cui}$$

$$R_2 = \frac{V_0}{I_2} = \frac{V_0}{(V-V_0)/R_1 - W_0/V_0} = \frac{V_0^2R_1}{V_0V - V_0^2 - W_0R_1} = 16.4\,\Omega$$

Quesito n. 4.

Dato che la potenza assorbita nella lampadina deve rimanere 20 W, bisogna rendere minima la potenza dissipata in R_1 e R_2, e quindi la corrente circolante in essi. La corrente in R_2 può essere ridotta a zero se R_2 è infinita (cioè il resistore è assente) e in questo caso anche la corrente in R_1 è necessariamente minima, pari alla corrente circolante nella lampadina. Il valore di R_1 in questo caso (si confronti quanto visto al punto 1) dev'essere il triplo della resistenza della lampadina (in funzione dei dati, $R_1 = V_0(V-V_0)/W_0$), quindi 21.6 Ω.

In alternativa, si può considerare che la potenza erogata dal generatore è inversamente proporzionale alla resistenza complessiva dell'intero circuito, e quindi deve essere massima tale resistenza complessiva. Ma se si vuole che fra A e B vi sia una d.d.p. di 12 V con un generatore a 48 V, tale resistenza complessiva deve essere pari a $4R_1/3$; si tratta quindi di massimizzare R_1, e il valore massimo si ha quando in R_1 circola la minima corrente, cioè solo la corrente I_0 necessaria per alimentare la lampadina.

$$R_1 = \frac{(V-V_0)}{I_0} = V_0\frac{(V-V_0)}{W_0} = 21.6\,\Omega$$

In tal caso in R_2 non circola corrente, quindi R_2 deve essere infinita, cioè assente.

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica

e-mail: olifis@aif.it - fax: 041.584.1272

WEB: www.olifis.it

NOTA BENE

È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.