Associazione per l'Insegnamento della Fisica

2023

37ª edizione

Campionati di FISICA

lunedì 13 febbraio 2023

Soluzione

Gara di 2° Livello

Quesiti

QUESITO n. 1

Siano v il modulo della velocità iniziale del primo e v' il modulo della velocità dei due corpi dopo l'urto elastico.

Valgono la conservazione della quantità di moto e quella dell'energia per cui

$$\begin{cases} mv = Mv' - mv' \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \end{cases}$$ che è un sistema nelle incognite M e v'.

Ricavando v' dalla prima equazione si trova $v' = \dfrac{mv}{M-m}$ e sostituendo nella seconda $\quad M = 3m\,.$

Nota: si ricava anche che, indipendentemente dal valore di m, quando i due corpi dopo l'urto hanno in modulo la stessa velocità, si ha sempre $v' = v/2$.

QUESITO n. 2

Nel piano orizzontale la particella in moto circolare è soggetta alla forza di Lorentz, diretta radialmente, di modulo $F_{\mathrm{L}} = |q|\,vB = |q|\,\omega rB$.

Per la seconda legge della dinamica $m\omega^2 r = |q|\,\omega Br\,$. Da qui si ricava

$$|q| = \frac{\omega m}{B}\,.$$

La forza di Lorentz deve essere diretta verso il centro della circonferenza, quindi la carica q per la regola della mano destra deve essere negativa. In conclusione

$$q = -\frac{\omega m}{B}\,.$$

Nota: il valore di r è indeterminato nell'intervallo $0 < r < L$.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Si assegnano 2 punti per l'espressione del modulo di q e 1 punto per il segno corretto.*

QUESITO n. 3

Siano r la distanza tra il seggiolino (di massa m) e l'asse di rotazione della giostra e θ l'angolo che il cavo di sostegno forma con la verticale; il seggiolino è soggetto alla tensione del cavo $\vec{F}$ e al suo peso $\vec{P} = m\vec{g}$, come mostrato in figura. In termini di componenti, la seconda legge della dinamica si scrive

$$\begin{cases} F_x = m\omega^2 r \\ F_y - mg = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}\,.$$

Quindi

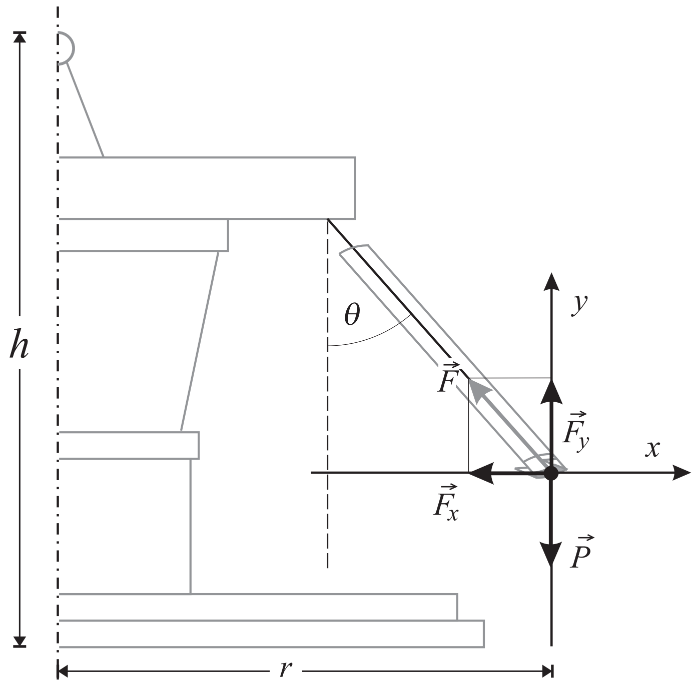
$$\omega^2 r = g\ \operatorname{tg}\theta \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g\ \operatorname{tg}\theta}{r}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\ \operatorname{tg}\theta}}\,.$$

Dalla figura si stima che $r/h \approx 0.8 \quad \Rightarrow \quad r = 0.8\,h \approx 7.2\,\mathrm{m}$; sempre dalla figura, usando direttamente un goniometro o con la misura dei due cateti del triangolo rettangolo, si ottiene $\theta \approx 41°$ da cui

$$T \approx 5.8\,\mathrm{s}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{5.3 \leq T \leq 6.3 \quad [\mathrm{s}]}$



NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Assegnare 1 punto per l'espressione di T, 1 punto per le misurazioni e 1 punto per il risultato.*

QUESITO n. 4

Inizialmente l'elettrone si trova a potenziale $V_\mathsf{A} = 0$; poiché è carico negativamente si sposterà verso punti a potenziale maggiore e, per la conservazione dell'energia, avrà velocità nulla nel punto allo stesso livello di potenziale, $V = 0$.

Dal grafico si evince che il punto cercato è quello dato dall'intersezione del grafico con l'asse x a sinistra del punto A.

Misurando sul grafico si ricava direttamente $x \approx 1\,\mathrm{mm}$, ovvero a distanza $d \approx 1\,\mathrm{mm}$ dall'origine. Questo valore può essere verificato perché, inserendo il valore $x = 1$ nell'equazione di $V(x)$, si ottiene come risultato $V = 0$.

Alternativamente si ottiene la risposta osservando che $x = 3$ è soluzione dell'equazione $V(x) = 0$ per cui si può scrivere

$$V(x) = (x-3)(x^2 - 5x + 4) \quad \text{che si azzera anche in } x = 1 \text{ e } x = 4\,.$$

La soluzione $x = 4\,\mathrm{mm}$ non è accettabile perché, partendo da fermo con energia potenziale U nulla ($V_\mathsf{A} = 0$), l'elettrone non può muoversi verso punti di energia potenziale $U = -e\,V > 0$.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Una risposta che non esclude, esplicitamente o implicitamente la radice $x = 4$ non è da ritenere neppure parzialmente corretta.*

QUESITO n. 5

In termini di campo elettrico la densità di energia è

$$u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\,E^2 \quad \text{dove} \quad E \leq E_\mathrm{max}\,.$$

Poiché il volume del dielettrico è As l'energia massima è

$$U_\mathrm{max} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\,E^2_\mathrm{max}As = 10.2\,\mathrm{J}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{10.0 \leq U_\mathrm{max} \leq 10.3 \quad [\,\mathrm{J}\,]}$

In modo alternativo: la capacità di un condensatore a facce piane, con dielettrico, è data da

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}A}{s}$$

e il campo elettrico, per la condizione $s \ll \sqrt{A}$, può essere trattato come uniforme, per cui $V_{\max} = E_{\max}\, s$.

Ne segue che l'energia massima è

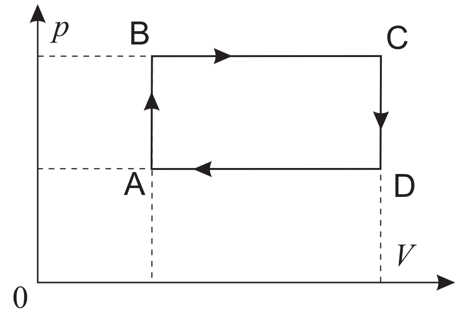
$$U_{\max} = \frac{1}{2}\, CV_{\max}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{\rm r} A}{s}\, E_{\max}^2\, s^2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\varepsilon_{\rm r}\, E_{\max}^2 As \quad \text{come sopra.}$$

QUESITO n. 6

Le trasformazioni AB e CD sono delle trasformazioni isocore perché, essendo rappresentate da rette passanti per l'origine, il rapporto $p/T = nR/V$ è costante, dunque V è costante. Quindi $\mathcal{L}_{\sf AB} = \mathcal{L}_{\sf CD} = 0$.

Le trasformazioni BC e DA sono isobare e il lavoro è $\mathcal{L}_{\rm isob} = p\Delta V = nR\Delta T$. Pertanto

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\sf AB} + \mathcal{L}_{\sf BC} + \mathcal{L}_{\sf CD} + \mathcal{L}_{\sf DA} = nR\,(T_{\sf C} - T_{\sf B}) + nR\,(T_{\sf A} - T_{\sf D}) = 2nRT_{\sf A}\,.$$



In modo alternativo: i parametri di stato (p, V, T) sono

in A$= (p_{\sf A}, V_{\sf A}, T_{\sf A})$

in B$= (2p_{\sf A}, V_{\sf A}, 2T_{\sf A})$

in C$= (2p_{\sf A}, 3V_{\sf A}, 6T_{\sf A})$

in D$= (p_{\sf A}, 3V_{\sf A}, 3T_{\sf A})$.

Nel piano $V-p$ il grafico è un rettangolo e il lavoro è numericamente uguale alla sua area:

$$\mathcal{L} = 2V_{\sf A}\, p_{\sf A} = 2nRT_{\sf A}\,.$$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Vengono attribuiti 2 punti solo nel caso di un errore algebrico nell'ultimo passaggio. Non deve mai essere attribuito 1 punto.*

QUESITO n. 7

Si indichi con U_0 l'energia potenziale gravitazionale iniziale del blocchetto, avendo fissato $U = 0$ sul fondo del piano inclinato. Sia $u_1 = 0$ la velocità iniziale e v_1 la velocità in fondo al piano inclinato nel primo lancio; sia u_2 la velocità iniziale e v_2 la velocità finale (da determinare) nel secondo lancio. Per la conservazione dell'energia meccanica, nel primo caso si ha

$$U_0 = \frac{1}{2}\, mv_1^2 \quad \text{mentre nel secondo caso si ha} \quad U_0 + \frac{1}{2}\, mu_2^2 = \frac{1}{2}\, mv_2^2\,.$$

In definitiva

$$\frac{1}{2}\, mv_1^2 + \frac{1}{2}\, mu_2^2 = \frac{1}{2}\, mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + u_2^2} = 5.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{5.80 \le v \le 5.82 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

QUESITO n. 8

Fissando un asse verticale, orientato verso il basso, con l'origine nel punto in cui inizia la frenata, si ha

$$v_{\rm i} = 87\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad v_{\rm f} = 0; \quad s_{\rm i} = 0, \quad s_{\rm f} = 2\,\mathrm{km}\,.$$

Le forze che agiscono sul modulo (spinta S e peso $mg_{_{\rm L}}$) sono costanti nel tempo, quindi il moto è uniformemente accelerato con accelerazione data dalla seconda legge della dinamica

$$mg_{_{\rm L}} - S = ma \Rightarrow a = g_{_{\rm L}} - \frac{S}{m},\,.$$

Dalle equazioni del moto uniformemente accelerato si ottengono le leggi orarie

$$v_{\rm f} = v_{\rm i} + at \qquad s_{\rm f} = s_{\rm i} + v_{\rm i}\, t + \frac{1}{2}\, at^2\,.$$

Quindi, dalla prima $t = -v_{\rm i}/a$; sostituendo nella seconda e ricordando che $v_{\rm f} = 0$ e $s_{\rm i} = 0$ si ottiene

$$-\frac{1}{2}v_{\rm i}^2 = as_{\rm f} = \left(g_{_{\rm L}} - \frac{S}{m}\right)\, s_{\rm f} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2s_{\rm f}} mv_{\rm i}^2 + mg_{_{\rm L}} = 6\,500\,\mathrm{N}\,.$$

Allo stesso risultato si può arrivare, sempre per via cinematica, anche partendo dalla relazione, valida nel moto uniformemente accelerato:

$$v_\mathrm{f}^2 - v_\mathrm{i}^2 = 2a\,\Delta s \quad \text{dalla quale si ottiene} \quad -\frac{1}{2}v_\mathrm{i}^2 = a s_\mathrm{f} = \left(g_{_\mathrm{L}} - \frac{S}{m}\right) s_\mathrm{f}$$

e si procede come sopra.

Si può anche usare la relazione tra lavoro delle forze non conservative ed energia meccanica E_M. Essendo la spinta S non conservativa e diretta in verso opposto allo spostamento $\Delta s = s_\mathrm{f} - s_\mathrm{i} = s_\mathrm{f}$ si ha

$$-S s_\mathrm{f} = \Delta E_\mathrm{M} = 0 - \left(\frac{1}{2}\,m v_\mathrm{i}^2 + m g_{_\mathrm{L}} s_\mathrm{f}\right) \quad \text{da cui si ottiene facilmente l'espressione per } S.$$

$$S = \frac{1}{2 s_\mathrm{f}} m v_\mathrm{i}^2 + m g_{_\mathrm{L}} = 6\,500\,\mathrm{N}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{6\,450 \le S \le 6\,550 \quad [\mathrm{N}]}$

QUESITO n. 9

Poiché la distanza D è maggiore della somma delle lunghezze a riposo delle due molle, entrambe le molle sono allungate.

La molla di destra esercita sulla molla di sinistra una forza di intensità $k_2\Delta\ell_2$ diretta verso destra e analogamente la molla di sinistra esercita una forza di intensità $k_1\Delta\ell_1$ su quella a destra, rivolta a sinistra.
Per il terzo principio della dinamica

$$k_1\,\Delta\ell_1 = k_2\,\Delta\ell_2\,. \qquad (1)$$

La lunghezza totale delle molle è D, perciò

$$\ell_{0,1} + \Delta\ell_1 + \ell_{0,2} + \Delta\ell_2 = D\,. \qquad (2)$$

Ricavando $\Delta\ell_2$ dalla (1) e sostituendo nella (2) si ottiene

$$\Delta\ell_1\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) = D - \ell_{0,1} - \ell_{0,2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell_1 = \frac{D - \ell_{0,1} - \ell_{0,2}}{1 + k_1/k_2} = 9.0\,\mathrm{cm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{8.8 \le \Delta\ell_1 \le 9.2 \quad [\mathrm{cm}]}$

QUESITO n. 10

Quando la parete è spostata di un tratto x i volumi nelle due parti del cilindro sono

$$V_1 = V_0 + Sx = S(L + x) \quad \text{e} \quad V_2 = V_0 - Sx = S(L - x)$$

e le rispettive pressioni, per la legge dei gas perfetti a T costante, sono

$$p_1 = \frac{V_0}{V_1}\,p_0 = \frac{L}{L + x}\,p_0 \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{V_0}{V_2}p_0 = \frac{L}{L - x}\,p_0\,.$$

La differenza di pressione sulle due facce della parete è

$$\Delta p = \left[\frac{L}{L - x} - \frac{L}{L + x}\right] p_0 = \frac{2Lx}{L^2 - x^2}\,p_0 \quad \text{da cui, per } x = L/2, \quad \Delta p = \frac{4}{3}\,p_0\,.$$

La forza sulla parete è quindi

$$F = \Delta p\,S = \frac{4}{3} S\,p_0\,.$$

In modo più immediato, il volume di una parte si dimezza e dunque la sua pressione raddoppia (legge di Boyle); nell'altra parte il volume diventa $3/2$ di quello iniziale e la pressione è $(2/3)\,p_0$.

La differenza di pressione è quindi

$$\Delta p = 2p_0 - \frac{2}{3}\,p_0 = \frac{4}{3}\,p_0\,.$$

Problemi

PROBLEMA n. 1 – I problemi di Paolo (*)

Parte A: Groviglio di molle.

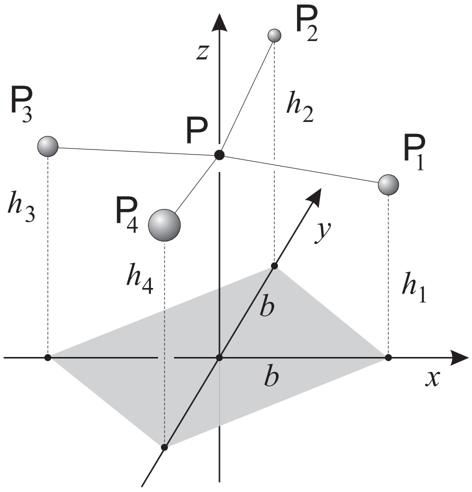
Quesito n. 1.

La posizione di B rispetto ad A è data dal vettore

$$\vec{r} = \vec{r}_{\mathsf{B}} - \vec{r}_{\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} x_{\mathsf{B}} - x_{\mathsf{A}} \\ y_{\mathsf{B}} - y_{\mathsf{A}} \end{pmatrix}$$

e la forza elastica è $\vec{F} = -k\,\vec{r}$ che si scrive quindi come

$$\vec{F} = -k\,\vec{r} = -k\,(\vec{r}_{\mathsf{B}} - \vec{r}_{\mathsf{A}}) = -k\,\begin{pmatrix} x_{\mathsf{B}} - x_{\mathsf{A}} \\ y_{\mathsf{B}} - y_{\mathsf{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x_{\mathsf{A}} - x_{\mathsf{B}}) \\ k(y_{\mathsf{A}} - y_{\mathsf{B}}) \end{pmatrix}.$$



Quesito n. 2.

Si considera il sistema di assi cartesiani definito nel testo, come in figura. La diagonale del quadrato risulta $2b$.

Le coordinate dei punti saranno $\mathsf{P}_1 = (b; 0; h_1)$; $\mathsf{P}_2 = (0; b; h_2)$; $\mathsf{P}_3 = (-b; 0; h_3)$; $\mathsf{P}_4 = (0; -b; h_4)$. Si considera poi una generica posizione per il punto P; le sue coordinate saranno allora P$= (x; y; h_0)$.

I vettori che, dall'origine, individuano la posizione dei cinque punti saranno:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ h_1 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ h_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ h_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ h_4 \end{pmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h_0 \end{pmatrix}.$$

Quesito n. 3.

Le forze elastiche agenti sul punto centrale saranno allora

$$\vec{F}_1 = k(\vec{r}_1 - \vec{r}); \quad \vec{F}_2 = k(\vec{r}_2 - \vec{r}); \quad \vec{F}_3 = k(\vec{r}_3 - \vec{r}); \quad \vec{F}_4 = k(\vec{r}_4 - \vec{r}).$$

Per l'equilibrio del punto P dovrà essere

$$0 = \sum_i \vec{F}_i = k \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}) = k\left(\sum_i \vec{r}_i - 4\vec{r}\right) \qquad \text{quindi} \qquad 4\vec{r} = \sum_i \vec{r}_i$$

da cui, sostituendo le espressioni precedenti per i vettori,

$$\begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - b \\ b - b \\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \end{pmatrix} \quad \text{e, in definitiva,}$$

$$x = y = 0; \quad h_0 = \frac{1}{4}\,(h_1 + h_2 + h_3 + h_4).$$

Il punto P sarà perciò in equilibrio sulla verticale del centro del quadrato; la quota di P risulta essere la media aritmetica delle quote degli altri quattro punti.

NOTA per i correttori ⇒ *Le risposte sono accettabili anche se espresse in termini di versori* $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

(*) Questo problema ha origine da proposte di Paolo Nesti.
Recentemente scomparso, Paolo è stato nel Gruppo Olimpiadi dall'inizio fino ad alcuni anni fa, contribuendo attivamente e fortemente, con la sua esperienza e le sue doti di ottimo insegnante di Fisica, alla nascita ed alla crescita di questa realtà che oggi coinvolge circa ottocento scuole in tutta Italia. Cogliamo questa occasione per ricordarlo e farlo conoscere a chi non ha avuto questa fortuna.

Parte B: Corsa con il vento.

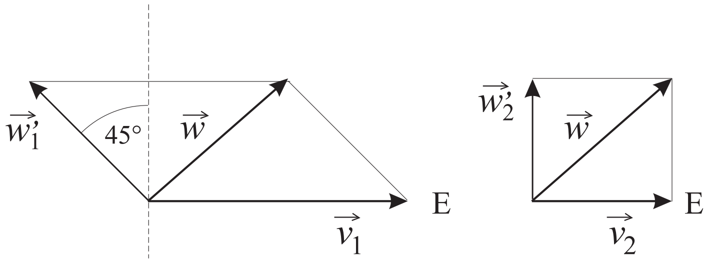
Sia $\vec{w}$ la velocità del vento rispetto al terreno; essa non cambia nei due casi. Siano rispettivamente $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità di Giovanni, rispetto al terreno, nei due casi.

Siano poi rispettivamente $\vec{w}_1'$ e $\vec{w}_2'$ le velocità del vento osservate da Giovanni rispetto a se stesso, cioè le velocità relative al sistema di riferimento in moto con Giovanni.

Applicando la trasformazione galileiana delle velocità, nei due casi sarà

$$\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1' \qquad \vec{w} = \vec{v}_2 + \vec{w}_2'$$

come mostrato in figura.



Fissato un riferimento cartesiano ortogonale con l'asse x rivolto ad Est e l'asse y a Nord e analizzando le componenti delle velocità, dalla figura si può notare che

$w'_{1,x} = -w'_{1,y}$ (poiché $\alpha' = 45°$) e che $w'_{2,x} = 0$ mentre $w'_{2,y} = w'_{1,y}$.

In termini vettoriali, sottintendendo le unità di misura (km/h)

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w'_{1,x} \\ w'_{1,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w'_{2,y} \end{pmatrix} \quad \text{da cui}$$

$$w_x = 8, \quad w'_{1,x} = w_x - 15 = -7 \quad \text{e} \quad w_y = w'_{1,y} = w'_{2,y} = -w'_x = 7, \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sarà dunque

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 10.6\,\text{km/h} \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{10.0 \le w \le 11.2 \quad [\text{km/h}]}$$

e

$$\tan\alpha = \frac{w_y}{w_x} = \frac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{7}{8} = 41.2° \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{41.0° \le \alpha \le 41.4°}.$$

In modo più informale, le due componenti del vento si possono determinare in questo modo: se, andando a 8 km/h verso Est, Giovanni sente il vento venire da Sud, vuol dire che la componente verso Est della velocità del vento (w_x) è 8 km/h.

Quando va a 15 km/h verso Est, la componente in direzione Est-Ovest della velocità percepita (relativa) del vento (w'_x) è allora $(15 - 8)\,\text{km/h} = 7\,\text{km/h}$. Se la direzione della velocità percepita ($\vec{w}'$) è a 45°, vuol dire che la componente del vento in direzione Nord-Sud ($w'_y = w'_x$) è 7 km/h.

Parte C: Macchina termica.

Quesito n. 1.

Detto λ_f il calore latente di fusione del ghiaccio (v. Tavola di Costanti Fisiche), il blocco di ghiaccio sarà completamente fuso quando sarà stata fornita una quantità di calore pari a

$$Q_\text{f} = \lambda_\text{f}\, m_\text{g} = 8.360 \times 10^6\,\text{J}. \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{8.344 \le Q_\text{f} \le 8.376 \quad [10^6\,\text{J}]}$$

Quesito n. 2.

Il rendimento della macchina di Carnot è dato da

$$\eta_\text{C} = (1 - T_\text{f}/T_\text{c}),$$

dove le temperature sono misurate in kelvin. Il rendimento della macchina è quindi

$$\eta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_\text{f}}{T_\text{c}}\right).$$

Il lavoro compiuto dalla macchina termica può essere espresso in termini del calore assorbito dalla sorgente calda (Q_c) o del calore ceduto al ghiaccio (Q_f) dalle relazioni

$$L = \eta\, Q_\mathrm{c} = \eta\,(Q_\mathrm{f} + L) \quad \text{essendo in un ciclo } Q_\mathrm{c} - Q_\mathrm{f} - L = 0 \quad .$$

Da qui

$$L = \frac{\eta\; Q_\mathrm{f}}{(1-\eta)}\,.$$

L'intervallo di tempo richiesto è quindi

$$\Delta t = \frac{L}{P} = \frac{\eta\; Q_\mathrm{f}}{(1-\eta)\,P} = \frac{(1 - T_\mathrm{f}/T_\mathrm{c})\,\lambda_\mathrm{f}\, m_\mathrm{g}}{(1 + T_\mathrm{f}/T_\mathrm{c})\,P} = 3.234 \times 10^4\,\mathrm{s} \approx 9\,\mathrm{h}\,. \qquad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{3.220 \le \Delta t \le 3.248 \quad [\,10^4\,\mathrm{s}\,]}$$

PROBLEMA n. 2 – Energia immagazzinata in un condensatore

Quesito n. 1.
Sia $\vec{E}$ il campo elettrico interno al condensatore. Trascurando gli effetti di bordo, poiché $d \ll \sqrt{A}$, si può assumere $E = \Delta V/d$ uniforme.

Il campo elettrico interno al condensatore si può anche calcolare come $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{A\varepsilon_0}$.

Imponendo l'uguaglianza tra le espressioni per questi due campi, si ottiene il modulo della carica Q su un'armatura: $Q = \varepsilon_0 A \Delta V/d$.

Il modulo della forza su un'armatura si ottiene moltiplicando la carica dell'armatura per il campo elettrico generato dall'altra armatura, pari alla metà del campo nel condensatore

$$F = Q\,\frac{E}{2} = Q\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2A\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 A \Delta V^2}{2d^2}\,.$$

L'ultima espressione è stata ottenuta sostituendo il valore di Q trovato precedentemente.

Quesito n. 2.
L'energia U immagazzinata nel condensatore si calcola moltiplicando la densità di energia del condensatore per il suo volume.

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{d}\right)^2 A d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\Delta V^2 A}{d}\,.$$

In alternativa si può calcolare l'energia immagazzinata come:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d}\Delta V^2\,.$$

La variazione di energia immagazzinata si calcola come:

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\Delta V^2 A}{2d} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\Delta V^2 A}{d} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 \frac{\Delta V^2 A}{d}\,.$$

Quesito n. 3.
La forza tra le armature è attrattiva, per cui per allontanarle occorre tirarle verso l'esterno. Poiché il processo avviene lentamente, la forza che si applica ha la stessa intensità di quella elettrostatica tra le armature.

Si può osservare che, lavorando a ΔV costante, la forza elettrostatica tra le due armature è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Per analogia con la forza coulombiana o quella gravitazionale, in cui il modulo della forza è cost/r^2 e il suo lavoro è dato da $-\mathrm{cost}/r_\mathrm{f} + \mathrm{cost}/r_\mathrm{i}$, nel nostro caso il lavoro fatto dalla forza attrattiva tra le armature è

$$\mathcal{L} = -\frac{\mathrm{cost}}{2d} + \frac{\mathrm{cost}}{d} \quad \text{con} \quad \mathrm{cost} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \Delta V^2 A\,. \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 \frac{\Delta V^2 A}{d}\,.$$

Il lavoro fatto dalla forza esterna che occorre applicare per allontanare le armature è l'opposto di questo.

In modo equivalente, il lavoro di separazione si può calcolare integrando da d a $2d$ la forza in $\mathrm{d}x$.

$$\mathcal{L} = \int_d^{2d} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_d^{2d} \frac{\varepsilon_0 A \Delta V^2}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \frac{\Delta V^2 A}{d}\,.$$

pari al risultato trovato in precedenza.

Nota: la domanda 2 e la domanda 3 hanno risposte diverse, il che potrebbe non essere intuitivo. Il lavoro compiuto dalla forza che agisce sulla seconda armatura non è uguale alla variazione di energia immagazzinata nel condensatore perché la carica sulle armature del condensatore è diversa nei due casi.

PROBLEMA n. 3 – Misura di spessore

Quesito n. 1.
I due raggi che incidono sullo schermo in direzione perpendicolare al piano delle fenditure risultano sfasati in quanto quello che attraversa la lamina viene ritardato a causa della minore velocità di propagazione all'interno della lamina. La differenza dei tempi (sfasamento temporale) è

$$\Delta t = \frac{s}{v} - \frac{s}{c} = \frac{(n-1)s}{c} \quad \text{essendo} \quad v = c/n\,.$$

Quesito n. 2.
Nel punto del massimo centrale della figura di interferenza i due raggi sono in fase. Pertanto lo sfasamento temporale viene compensato quando il secondo raggio percorre una distanza maggiore di un tratto $\Delta\ell = c\,\Delta t = (n-1)s$. Questo si ha per una direzione individuata dall'angolo θ dato da

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta = \Delta\ell \quad \Rightarrow \quad \theta \approx \frac{(n-1)s}{d} \quad \text{essendo } d \gg s.$$

Lo spostamento del massimo centrale è quindi

$$\Delta x = D\ \mathrm{tg}\,\theta \approx D\,\theta = \frac{(n-1)\,s}{d}\,D$$

Facendo riferimento al massimo centrale, per compensare il ritardo dovuto alla lamina, il raggio che emerge dalla fenditura libera deve compiere un percorso più lungo; dunque la figura di interferenza si sposta dalla parte corrispondente alla posizione della lamina.

Quesito n. 3.
La distanza tra due massimi contigui è $\delta x = (\lambda/d)\,D$ Si ha quindi la relazione

$$\frac{(n-1)\,s}{d}\,D = N\frac{\lambda}{d}\,D \quad \Rightarrow \quad s = \frac{N\lambda}{n-1} = 250\,\mu\text{m}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{248 \le s \le 252 \quad [\mu\text{m}]}$

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIFIS
Segreteria dei Campionati Italiani di Fisica
E-mail: segreteria@olifis.it - WEB: www.olifis.it

I Campionati di Fisica sono organizzate dall'AIF su mandato del MINISTERO dell'ISTRUZIONE e del MERITO