Associazione per l'Insegnamento della Fisica

34ª Edizione

Olimpiadi di Fisica 2020

Gara di 2° livello — mercoledì 19 febbraio 2020

Soluzione

Quesiti

QUESITO n. 1

Nei primi 2 secondi l'oggetto si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $a_1 = 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ e velocità iniziale nulla. La distanza percorsa x_1 e la velocità finale v_1, all'istante $t_1 = 2\,\mathrm{s}$, valgono rispettivamente

$$x_1 = \frac{1}{2}\,a_1\,t_1^2 = 4\,\mathrm{m} \quad \text{e} \quad v_1 = a_1\,t_1 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

Anche nel secondo tratto il moto è uniformemente accelerato, ma con accelerazione negativa $a_2 = -4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, e con velocità iniziale v_1.

Se la velocità è sempre positiva, la massima distanza dal punto di partenza sarà raggiunta alla fine dell'intervallo esaminato. Se la velocità si annulla e il corpo inverte il moto, ci sono due possibilità: la massima distanza viene raggiunta nell'istante in cui avviene l'inversione del moto oppure all'istante finale.

La velocità all'istante finale ($t_2 = 4\,\mathrm{s}$) è data da

$$v_2 = v_1 + a_2\,(t_2 - t_1) = -4\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

Poiché risulta negativa, l'oggetto a un certo istante $t^\star$ ha invertito il moto. Si ha

$$v(t^\star) = v_1 + a_2(t^\star - t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^\star = t_1 - \frac{v_1}{a_2} = 3\,\mathrm{s}\,.$$

La distanza tra l'origine e la posizione all'istante $t^\star$ è

$$x(t^\star) = x_1 + v_1\,(t^\star - t_1) + \frac{1}{2}\,a_2\,(t^\star - t_1)^2 = 6.0\,\mathrm{m}\,.$$

All'istante t_2, risulta

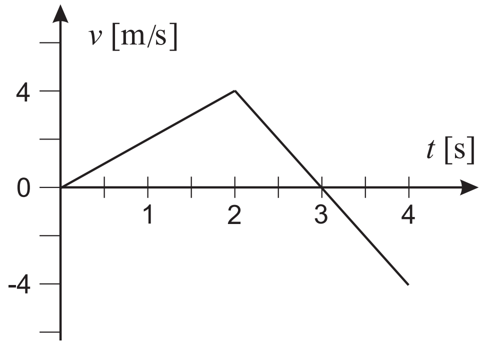
$$x(t_2) = x_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\,a_2\,(t_2 - t_1)^2 = 4.0\,\mathrm{m}\,.$$

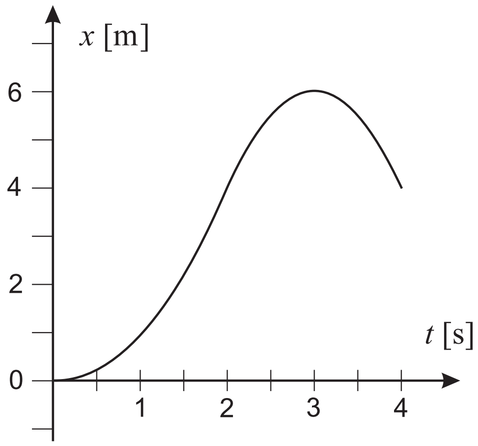
La massima distanza dall'origine è quindi 6.0 m.

Nella figura che segue sono rappresentate la velocità $v(t)$ a sinistra e la posizione $x(t)$ a destra.

Nota: la soluzione poteva essere trovata dal grafico $v(t)$ calcolando l'area del triangolo nel semipiano $v > 0$ ed osservando che tra 3 e 4 secondi l'area del triangolo (nel semipiano $v < 0$) indica che il corpo percorre 2 m a ritroso.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Va attribuito punteggio nullo se non si è controllato chiaramente - così come è nella soluzione o in altro modo - che la massima distanza non si ha al tempo t_2.*





QUESITO n. 2

La carica accumulata su una armatura del condensatore vale $Q = i\,\Delta t$ con $\Delta t = 30\,\mathrm{s}$; detta V la d.d.p. finale la capacità C è

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{i\,\Delta t}{V} = 50.0\,\mu\mathrm{F}\,.$$

RIS ⇒ $\boxed{49.7 \le C \le 50.3 \quad [\,\mu\mathrm{F}\,]}$

QUESITO n. 3

Nel passaggio da un mezzo all'altro cambia la lunghezza d'onda ma non la frequenza, per cui, indicata con f la frequenza, con n l'indice di rifrazione del vetro e con v la velocità della luce nel vetro, ricordando che l'indice di rifrazione è $n = c/v$, la lunghezza d'onda del raggio di luce nel vetro è data da

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{n\,f} = 345\,\mathrm{nm}\,.$$

RIS ⇒ $\boxed{344 \le \lambda \le 346 \quad [\,\mathrm{nm}\,]}$

QUESITO n. 4

Si immagini di suddividere la carica elettrica, distribuita uniformemente lungo la barra, in tante cariche elementari. Ogni carica elementare q_i, alla distanza r_i, contribuisce al potenziale con un termine

$$V_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\, r_i} \quad \text{(che tende a 0 per valori di } r_i \text{ molto grandi).}$$

Per il principio di sovrapposizione il potenziale di tutta la distribuzione è dato dalla somma di tutti i termini e poiché la distanza del punto C dalle singole cariche elementari è la stessa (per ogni i: $r_i = r$) si ha

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\, r} = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\varepsilon_0\, r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r} \quad \text{con} \quad Q = \frac{\pi r \lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\lambda}{8\,\varepsilon_0} = 211.8\,\mathrm{V}\,.$$

RIS ⇒ $\boxed{211.4 \le V \le 212.2 \quad [\,\mathrm{V}\,]}$

NOTA per i correttori ⇒ *Va attribuito punteggio nullo se non è spiegato chiaramente – come è nella soluzione o in altro modo – che la carica si trova tutta alla stessa distanza da C e che quindi si può applicare l'espressione del potenziale di una carica puntiforme.*

QUESITO n. 5

Siano M la massa del blocco ed m quella del contrappeso, A ed a le rispettive distanze dall'asse verticale della gru; per quanto detto, dato che il baricentro della struttura senza carico e contrappeso è già sull'asse della gru, quando il blocco è fuori dall'acqua, basta che sia $Mg\,A = mg\,a$ da cui $a = MA/m$.

Quando il blocco è completamente immerso in acqua, risente anche della spinta di Archimede $F = Mg\rho_a/\rho_c$; dove ρ_a è la densità dell'acqua, e quindi occorre avvicinare il contrappeso di una quantità Δa. L'equilibrio è dato ora dalla relazione

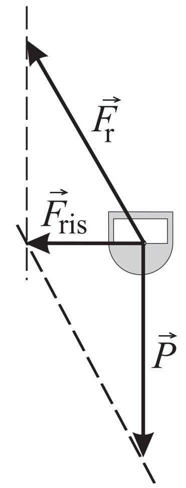
$$(Mg - F)\,A = mg\,(a - \Delta a) \quad \Rightarrow \quad F A = mg\,\Delta a \quad \text{da cui} \quad \Delta a = \frac{FA}{mg}\,.$$

Si ottiene infine

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{FA}{mg}\frac{m}{MA} = \frac{(Mg\,\rho_a/\rho_c)\,A}{MgA} = \frac{\rho_a}{\rho_c} = 0.435 = 43.5\,\%\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{43.4 \le \Delta a/a \le 43.6 \quad [\,\%\,]}$

QUESITO n. 6



Le forze che agiscono sulla cabina sono due: il peso, $\vec{P}$, e la forza esercitata dalla ruota, $\vec{F}_\mathrm{r}$. Poiché il moto della cabina è circolare e uniforme, la risultante di queste forze dev'essere centripeta. Il diagramma delle forze è mostrato a lato.

Il modulo della forza risultante è $F_\mathrm{ris} = mv^2/r$.

Il modulo di F_r è allora

$$F_\mathrm{r} = \sqrt{F_\mathrm{ris}^2 + P^2} = m\sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + g^2} = 4.54\,\mathrm{kN}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{4.50 \le F_\mathrm{r} \le 4.60 \quad [\,\mathrm{kN}\,]}$

Nota: l'angolo α che questa forza forma con l'orizzontale risulta

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{P}{F_\mathrm{ris}} = \operatorname{arctg}\frac{mg}{mv^2/r} = \operatorname{arctg}\frac{gr}{v^2} = \operatorname{arctg}1.72 = 59.8°\,.$$

QUESITO n. 7

La simmetria del problema è cilindrica, di conseguenza le linee di campo sono circonferenze con il centro sull'asse del cavo che giacciono su piani perpendicolari al cavo stesso. I punti a $r = 0.25\,\mathrm{cm}$ dall'asse del cavo sono interni al cavo coassiale. Applicando il teorema di Ampère lungo la circonferenza di raggio r avente centro sull'asse del caso e disposta su un piano perpendicolare allo stesso asse, si ha che

$$2\pi\,r\,B = \mu_0 i \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\,r} = 8.80 \times 10^{-6}\ \mathrm{T}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{8.76 \le B \le 8.84 \quad [10^{-6}\mathrm{T}\,]}$

I punti che distano $r = 0.75\,\mathrm{cm}$ dall'asse del cavo sono esterni. Applicando in modo analogo il teorema di Ampère, si ricava che in tali punti $B = 0$ perché la corrente concatenata è nulla.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Per il campo nel punto interno: 2 punti; per quello nel punto esterno: 1 punto.*

QUESITO n. 8

La potenza della luce (energia per unità di tempo) è pari al numero N_f di fotoni per unità di tempo per l'energia di ogni fotone $\mathcal{E} = h\,f = hc/\lambda$ con $\lambda\,f = c$.

$$P = N_\mathrm{f}\,\mathcal{E} = \frac{N_\mathrm{f}\,hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad N_\mathrm{f} = \frac{P\,\lambda}{hc}\,.$$

La corrente elettrica (carica per unità di tempo) è pari al numero di elettroni estratti per unità di tempo N_e per la carica elementare

$$I_\mathrm{max} = N_\mathrm{e}\,e \quad \Rightarrow \quad N_\mathrm{e} = \frac{I_\mathrm{max}}{e}\,.$$

Il rapporto η tra numero di elettroni estratti in un certo tempo e il numero di fotoni incidenti (detta "efficienza quantica") è quindi

$$\eta = \frac{N_\mathrm{e}}{N_\mathrm{f}} = \frac{I_\mathrm{max}}{e}\,\frac{hc}{P\,\lambda} = 0.233\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.232 \le \eta \le 0.234}$

QUESITO n. 9

L'energia fornita dal fornello nell'intervallo di tempo $\Delta t = 20\,\text{min} = 1200\,\text{s}$ è $E_\text{f} = P\Delta t$.

L'energia necessaria per riscaldare l'acqua fino a 100 °C ($\Delta T = 80\,°\text{C}$) è $E_\text{r} = mc\Delta T = \rho_a V c\,\Delta T$.

Trascurando le dispersioni, l'energia impiegata per la vaporizzazione è $E_\text{v} = \lambda_\text{e}\, m = E_\text{f} - E_\text{r}$ e l'acqua passata allo stato di vapore risulta

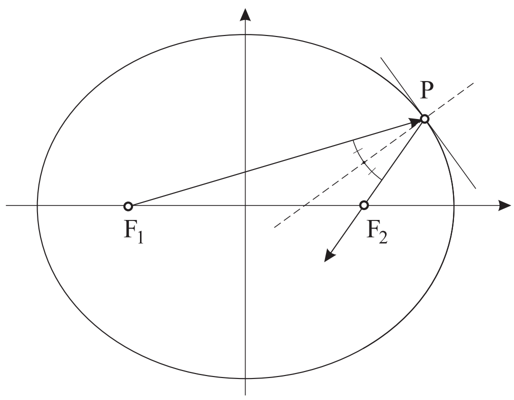
$$m = \frac{E_\text{v}}{\lambda_\text{e}} = \frac{P\Delta t - \rho_a V c\,\Delta T}{\lambda_\text{e}} = 0.501\,\text{kg} \quad \text{(equivalente a } 0.501\,\text{L)}.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.496 \le m \le 0.506 \quad [\,\text{kg}\,]}$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *È accettabile anche il risultato espresso come volume.*

QUESITO n. 10

Una delle proprietà dell'ellisse è che la perpendicolare alla tangente in un suo punto P è la bisettrice dell'angolo $\text{F}_1\widehat{\text{P}}\text{F}_2$ dove F_1 e F_2 sono i fuochi. Ne segue che un qualunque raggio luminoso proveniente da uno dei fuochi verrà riflesso nell'altro fuoco. Poiché tutti i raggi uscenti dalla sorgente nel piano orizzontale vengono riflessi verso l'osservatore, questi vedrà una linea luminosa orizzontale, all'altezza dei suoi occhi, per tutta la larghezza dello specchio, ad esclusione dei punti in cui l'osservatore fa ombra alla sorgente.



NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *È accettabile anche una soluzione in cui l'ombra data dall'osservatore non è citata.*

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

Segreteria delle Olimpiadi Italiane di Fisica

e-mail: segreteria@olifis.it
WEB: www.olifis.it

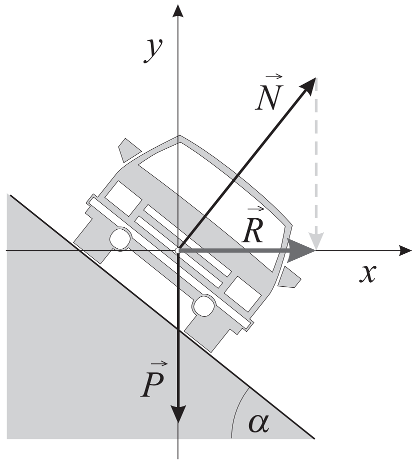
Le Olimpiadi di Fisica sono organizzate dall'AIF su mandato del MINISTERO DELL'ISTRUZIONE

Problemi

PROBLEMA n. 1 – Ovale di Monza

Quesito n. 1.

Si considerino, ad un certo istante, due assi x e y come in figura, ortogonali alla velocità della macchina, costante in modulo. Si indichino con $\vec{P}$ la forza peso, $\vec{N}$ la reazione normale e $\vec{R}$ la forza risultante che determina l'accelerazione centripeta e consente quindi di seguire la traiettoria curva di raggio r. In particolare la forza risultante dovrà essere orizzontale affinché la curva sia percorsa alla stessa quota.



In assenza della componente laterale (cioè ortogonale al moto) della forza d'attrito tra gomme e asfalto, valgono le equazioni

$$\begin{cases} N \operatorname{sen}\alpha = R = \dfrac{mv^2}{r} & \text{(asse } x) \\ N \cos\alpha - P = 0 & \text{(asse } y). \end{cases}$$

Eliminando N e risolvendo si ottiene:

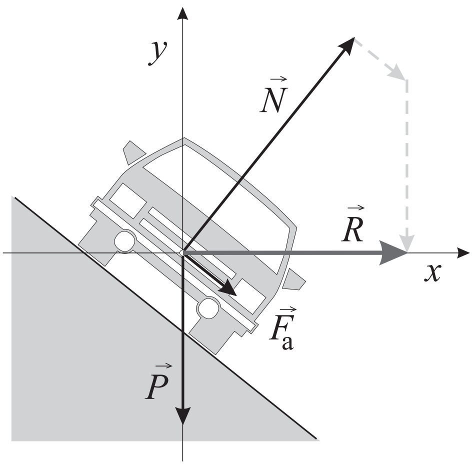
$$v = \sqrt{rg\ \operatorname{tg}\alpha} = 50.1\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 180.4\,\mathrm{km/h}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{50.0 \le v \le 50.2 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

Quesito n. 2.

Se la velocità della macchina è maggiore di quella appena calcolata, la forza risultante deve essere maggiore e l'equilibrio dinamico può essere ottenuto solo grazie all'intervento della componente laterale F_a della forza d'attrito tra gomme e asfalto che, entro un limite massimo, consente di percorrere la stessa curva. Infatti, affinché la macchina percorra la curva rimanendo alla stessa quota, occorre che la risultante delle forze applicate (sempre orizzontale) abbia modulo maggiore.

La massima velocità che la macchina può tenere è quella per cui la componente laterale dell'attrito statico è la massima consentita dal coefficiente d'attrito statico, ovvero $F_\mathrm{a,max} = \mu_\mathrm{s}\, N$, dove $\vec{N}$ è la reazione normale al piano della pista, nell'ipotesi che la componente dell'attrito parallela alla velocità sia trascurabile.



Le equazioni precedenti diventano:

$$\begin{cases} F_\mathrm{a,max} \cos\alpha + N \operatorname{sen}\alpha = R = \dfrac{mv_\mathrm{max}^2}{r} & \text{(asse } x) \\ N \cos\alpha - F_\mathrm{a,max} \operatorname{sen}\alpha - P = 0 & \text{(asse } y). \end{cases}$$

Eliminando N si ottiene

$$v_\mathrm{max} = \sqrt{rg\,\frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu_\mathrm{s}}{1 - \mu_\mathrm{s}\ \operatorname{tg}\alpha}}\,.$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$$v_\mathrm{max} = 138\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 500\,\mathrm{km/h}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{137 \le v_\mathrm{max} \le 139 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$.

Quesito n. 3.

In modo analogo, se la velocità della macchina è minore di quella calcolata al punto 1., la forza risultante deve essere minore, e quindi deve intervenire una forza di attrito rivolta verso l'esterno della curva, sempre fino al raggiungimento del limite massimo dato dal coefficiente d'attrito statico.

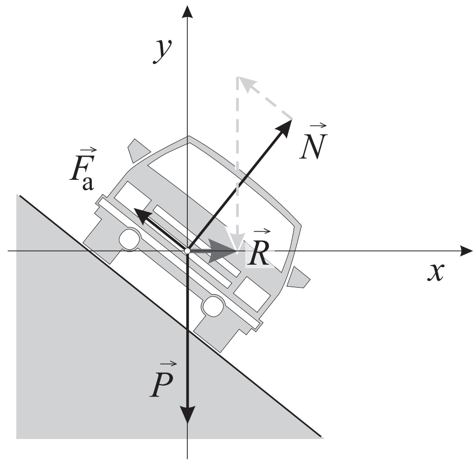
Le equazioni precedenti diventano:

$$\begin{cases} -F_{\mathrm{a,max}}\cos\alpha + N\,\mathrm{sen}\,\alpha = R = \dfrac{mv_{\min}^2}{r} & \text{(asse } x\text{)} \\ N\cos\alpha + F_{\mathrm{a,max}}\,\mathrm{sen}\,\alpha - P = 0 & \text{(asse } y\text{).} \end{cases}$$

Ponendo ancora $F_{\mathrm{a,max}} = \mu_{\mathrm{s}} N$ ed eliminando N, si ottiene

$$v_{\min} = \sqrt{rg\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu_{\mathrm{s}}}{1 + \mu_{\mathrm{s}}\,\mathrm{tg}\,\alpha}}\,.$$

Sostituendo adesso i dati nell'espressione della velocità minima si ottiene un radicando negativo. Questo avviene perché il coefficiente di attrito è abbastanza alto da non raggiungere, per nessuna velocità, la condizione di attrito al distacco in cui $F_{\mathrm{a}} = F_{\mathrm{a,max}} = \mu_{\mathrm{s}} N$. La minima velocità consentita è dunque zero.



Detto in altri termini, per $v \to 0$ anche $R \to 0$, e quindi si realizza la condizione per cui

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{a}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{a}} = -(\vec{P} + \vec{N}) \quad \text{con} \quad F_{\mathrm{a}} < \mu_{\mathrm{s}} N\,.$$

Si può osservare che questa non è altro che la condizione di equilibrio statico, cioè con la macchina ferma su un terreno in pendenza; come noto è sufficiente che il coefficiente di attrito statico sia $\mu_{\mathrm{s}} \geq \mathrm{tg}\,\alpha$, come in questo caso.

Quesito n. 4.

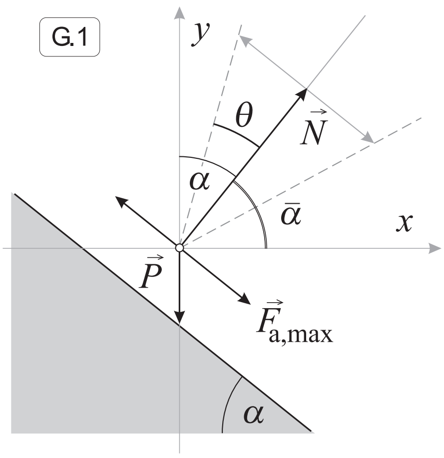
Nell'espressione ricavata al punto 2. per la velocità massima si può notare che il denominatore si annulla per

$\mu_{\mathrm{s}} = 1/\,\mathrm{tg}\,\alpha = 1.250$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.247 \leq \mu_{\mathrm{s}} \leq 1.253}$

e diventa negativo per valori di μ_{s} maggiori di questo. Dunque, anche per valori del coefficiente di attrito maggiori o uguali a questo, non si raggiunge la condizione di strisciamento in cui $F_{\mathrm{a}} = F_{\mathrm{a,max}} = \mu_{\mathrm{s}} N$; di conseguenza in questo caso non ci sono limiti teorici alla velocità massima dell'automobile.

Una soluzione grafica dei quesiti – anche solo qualitativa – può aiutare a dare un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti, in particolare al variare del coefficiente d'attrito statico μ_{s}.

G.1

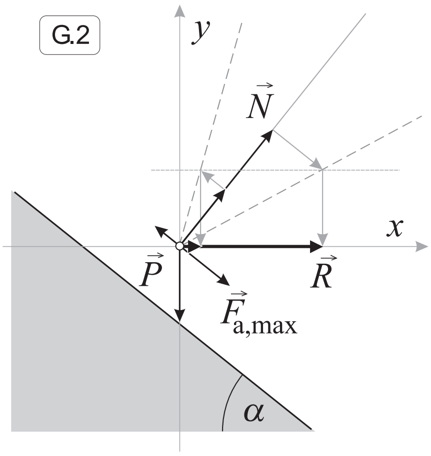


In figura G.1 sono mostrati gli angoli α, pendenza della curva, $\overline{\alpha}$, complementare di α che, per i dati del problema risulta maggiore di α. Sia poi θ l'angolo per cui $\mu_{\mathrm{s}} = \mathrm{tg}\,\theta$; poiché

$$F_{\mathrm{a,max}} = \mu_{\mathrm{s}} N = N\,\mathrm{tg}\,\theta$$

le linee tratteggiate ad un angolo θ dalla direzione normale consentono di determinare, per un dato $\vec{N}$, i vettori corrispondenti alla massima forza (laterale) d'attrito statico verso l'interno o verso l'esterno della curva ovvero, rispettivamente, con componente x positiva o negativa.

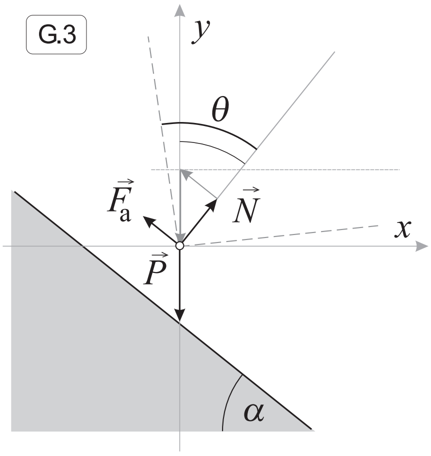
G.2



In figura G.2 il problema di determinare la massima e minima velocità possibile per affrontare la curva è risolto nel caso $\theta < \alpha$ ovvero $\mu < \operatorname{arctg}\alpha$ (per la pendenza assegnata significa $\mu < 0.8$).

Poiché la risultante delle forze applicate $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{a,max}}$, ha la funzione di forza centripeta, deve avere solo componente orizzontale e positiva. Nella costruzione poligonale, il vettore peso trasportato (in grigio) al di sopra dell'asse x determina le due possibili soluzioni di forza d'attrito massima verso l'interno o l'esterno della curva e di conseguenza i due possibili valori del modulo di $\vec{R}$ che danno le velocità massima e minima consentita (per chiarezza non sono riportate le etichette dei vettori nel caso di minima velocità).

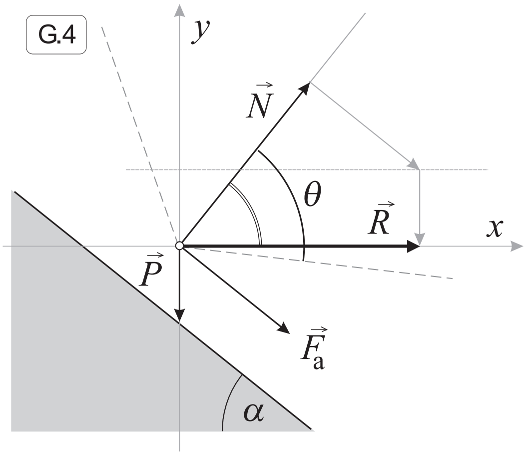
G.3



Il caso $\overline{\alpha} < \theta < \alpha$, quindi anche per $\mu = 0.9$, è mostrato in figura G.3. Anche se la relativa costruzione non è riportata in figura, si capisce che è possibile determinare un valore massimo della velocità con la stessa costruzione di sopra e che questa possa essere molto elevata.

Al contrario, poiché la risultante deve avere componente x non nulla non è possibile raggiungere la condizione di forza d'attrito massima verso l'esterno della curva. Risulta quindi $F_{\mathrm{a}} < F_{\mathrm{a,max}}$ e $R = 0$, corrispondente al caso di macchina ferma che non slitta verso il basso essendo $\mu_{\mathrm{s}} > \operatorname{tg}\alpha$.

G.4



Infine, in figura G.4 è mostrato il caso $\theta > \overline{\alpha}$ ovvero $\mu > 1/\operatorname{arctg}\alpha = 1.25$.

Come sopra non si raggiunge la condizione di forza d'attrito massima verso l'esterno, ma adesso per qualunque valore $R > 0$, e dunque per qualunque valore della velocità, esiste un valore della forza d'attrito (minore della massima verso l'interno) che risolve il problema.

Naturalmente questo non sarà vero in un caso reale del quale il modello utilizzato qui rappresenta una estrema semplificazione.

PROBLEMA n. 2 – Reticolo

Quesito n. 1.

Indicando con p il passo del reticolo, si ha

$$m_{\mathrm{r}} = \frac{p\,\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{r}}}{\lambda_{\mathrm{r}}} \qquad m_{\mathrm{v}} = \frac{p\,\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{v}}}{\lambda_{\mathrm{v}}}\,.$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{m_{\mathrm{v}}}{m_{\mathrm{r}}} = \frac{\lambda_{\mathrm{r}}\,\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{v}}}{\lambda_{\mathrm{v}}\,\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{r}}} = 1.50\,.$$

Quesito n. 2.

Valori interi e piccoli di m_{v} e m_{r} che abbiano come rapporto 1.50 sono $m_{\mathrm{v}} = 3$ e $m_{\mathrm{r}} = 2$, $m_{\mathrm{v}} = 6$ e $m_{\mathrm{r}} = 4$ e così via. I possibili valori di m dipendono dal passo del reticolo, che risulta

$$p = m_{\mathrm{r}}\lambda_{\mathrm{r}}/\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{r}} = m_{\mathrm{v}}\lambda_{\mathrm{v}}/\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{v}} = (1.5\,\mu\mathrm{m})\,m_{\mathrm{r}} = (1.0\,\mu\mathrm{m})\,m_{\mathrm{v}}\,.$$

All'aumentare del passo del reticolo le righe diventano sempre più fitte, dunque è possibile che compaiano altre righe in questo intervallo angolare.

La prima coppia di valori ($m_{\mathrm{v}} = 3$ e $m_{\mathrm{r}} = 2$) è senz'altro accettabile. Infatti il passo del reticolo risulta $p = 3.0\,\mu$m e di conseguenza la riga rossa successiva (quella di ordine 3) si trova ad un angolo di 41.3°, mentre la riga verde precedente (di ordine 2) si trova ad un angolo di 20.9°, entrambe al di fuori dell'intervallo considerato.

La seconda coppia di valori ($m_{\mathrm{v}} = 6$ e $m_{\mathrm{r}} = 4$) è invece da scartare, in quanto il passo del reticolo risulterebbe $6.0\,\mu$m e la riga verde del quinto ordine si troverebbe ad un angolo di 26.5°, quindi tra le due righe indicate.

A maggior ragione questo si verifica anche per coppie di ordine superiore (9-6 e così via), dato che il numero di righe nell'intervallo considerato aumenta.

Quesito n. 3.

In base a quanto detto sopra il passo del reticolo risulta

$p = 3.00\,\mu\mathrm{m}\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.98 \le p \le 3.02 \quad [\,\mu\mathrm{m}\,]}$

Quesito n. 4.

La riga rossa si osserva nelle posizioni angolari date da

$$\operatorname{sen}\theta = m\,\frac{\lambda_{\mathrm{r}}}{p} = 0.22\,m\,.$$

Il massimo valore di m per cui $\operatorname{sen}\theta = m\lambda_{\mathrm{r}}/p$ non supera 1 è $m_{\max} = 4$.

PROBLEMA n. 3 – Un campo teorico

Quesito n. 1.

Per definizione, e scegliendo come percorso il segmento sull'asse z per cui $\vec{E}\cdot\vec{ds} = E_z\,dz$, si ha

$$V(O) - V(A) = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int_0^{\ell} E_z\,dz = E_z\,\ell = E_0\,b^2\,\ell^3 = \Delta V \quad\Rightarrow\quad b = \sqrt{\frac{\Delta V}{E_0\,\ell^3}} = 1.200\,\mathrm{m}^{-1}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.194 \le b \le 1.206 \quad [\,\mathrm{m}^{-1}\,]}$

Quesito n. 2.

Il modulo del campo nel punto B è quindi

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = E_0\,\sqrt{[(a\ell^2 + b)^2\ell^2 + (b\ell)^4 + (b\ell)^4} = E_0\,\ell\,\sqrt{a^2\,\ell^4 + 2ab\ell^2 + b^2 + 2b^4\ell^2} = 768\,\mathrm{V\,m}^{-1}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{760 \le E \le 776 \quad [\,\mathrm{V\,m}^{-1}\,]}$

Quesito n. 3.

Si può usare il teorema di Gauss calcolando il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie del cubo, divisa nelle sei facce:

$$\Phi = \int\limits_{x=\ell} E_x\,ds - \int\limits_{x=-\ell} E_x\,ds + \int\limits_{y=\ell} E_y\,ds - \int\limits_{y=-\ell} E_y\,ds + \int\limits_{z=\ell} E_z\,ds - \int\limits_{z=-\ell} E_z\,ds\,.$$

Si osserva che su ogni faccia la rispettiva componente perpendicolare è uniforme per cui il flusso è dato semplicemente dal prodotto di tale componente per la superficie $4\ell^2$. Il flusso si scrive quindi

$$\Phi = 4\ell^2\ [E_x(\ell) - E_x(-\ell) + E_y(\ell) - E_y(-\ell) + E_z(\ell) - E_z(-\ell)]$$

dove

$$E_x(\ell) = E_0\,(a\,\ell^3 + b\,\ell); \quad E_x(-\ell) = -E_x(\ell); \quad E_y(\ell) = E_y(-\ell) = E_0\,b\,\ell^2; \quad E_z(\ell) = E_z(-\ell) = E_0\,b\,\ell^2\,.$$

Quindi la seconda e terza coppia si annullano e resta

$$\Phi = 2E_0\,(a\,\ell^3 + b\,\ell)\,(4\ell^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad Q = 8\varepsilon_0\,E_0\,\ell^3\,(a\,\ell^2 + b) = 49.9\,\mathrm{nC}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{49.2 \le Q \le 50.6 \quad [\mathrm{nC}]}$

Quesito n. 4.

La densità di carica nel punto O è data dal limite della densità media in un volume attorno ad O quando tale volume tende a zero

$$\rho(\mathrm{O}) = \lim_{\mathcal{V}\to 0} \frac{Q(\mathcal{V})}{\mathcal{V}}\,.$$

Prendendo volumi cubici di spigolo 2ℓ con ℓ tendente a 0, si ha

$$\rho(\mathrm{O}) = \lim_{\ell\to 0} \frac{8\varepsilon_0\,E_0\,\ell^3\,(a\,\ell^2 + b)}{8\,\ell^3} = \lim_{\ell\to 0}\ \varepsilon_0\,E_0\,(a\,\ell^2 + b) = \varepsilon_0\,E_0\,b = 1.59\,\mathrm{nC\,m^{-3}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.58 \le \rho(\mathrm{O}) \le 1.60 \quad [\mathrm{nC\,m^{-3}}]}$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *È accettabile anche la soluzione che fa uso della divergenza del campo* $\vec{E}$. [1]

PROBLEMA n. 4 – Se la batteria è piccola

Quesito n. 1.

Il metodo non funziona perché, nel caricare il condensatore 1, la corrente nel circuito scorre in verso orario e dunque il condensatore 2 necessariamente si scarica un po'; la d.d.p. finale ai capi del condensatore 1 è quindi minore di 24 V.

Più formalmente si determina la d.d.p. finale del condensatore 1.

Sia $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ la f.e.m. ai capi delle due batterie, q_0 la carica iniziale del condensatore ausiliario 2 e q_1, q_2 le cariche, in condizione di equilibrio, sui due condensatori; le due equazioni necessarie per trovarle sono date dalla conservazione della carica e dalla legge di Kirchhoff nel circuito.

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = q_0 \\ \dfrac{q_1}{C_1} - \dfrac{q_2}{C_2} = \mathcal{E}\,. \quad \text{(Attenzione ai segni!)} \end{cases}$$

---

(1) Il teorema di Gauss in forma differenziale si scrive

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad\Rightarrow\quad \rho = \varepsilon_0\,E_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \varepsilon_0\,E_0\,\left(3a\,x^2 + b + 2b^2\,y\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \rho(0,0,0) = \varepsilon_0\,E_0\,b = 1.59\,\mathrm{nC\,m^{-3}}\,.$$

Il sistema si scrive in forma equivalente

$$\begin{cases} C_1\,q_1 + C_1\,q_2 = C_1\,q_0 \\ C_2\,q_1 - C_1\,q_2 = C_1\,C_2\,\mathcal{E} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} C_2\,q_1 + C_2\,q_2 = C_2\,q_0 \\ C_2\,q_1 - C_1\,q_2 = C_1\,C_2\,\mathcal{E} \end{cases}$$

da cui, sommando nel primo e sottraendo nel secondo, si ha

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{C_1\,q_0 + C_1\,C_2\,\mathcal{E}}{C_1 + C_2} \quad \Rightarrow \quad V_{C_1} = \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_0 + C_2\,\mathcal{E}}{C_1 + C_2} \\ q_2 = \dfrac{C_2\,q_0 - C_1\,C_2\,\mathcal{E}}{C_1 + C_2}\,. \end{cases}$$

In particolare, poiché $q_0 = C_2\,\mathcal{E}_1$, risulta

$$V_{C_1} = \frac{C_2\,\mathcal{E}_1 + C_2\,(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{C_1 + C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,(2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,V_1 < V_1\,.$$

Nota: si può osservare che, pur di avere un condensatore di capacità C_2 grande quanto si vuole, la d.d.p. finale del condensatore 1 può essere praticamente uguale a quella richiesta; se però $C_{2,\max} = 10\,C_1$ allora la d.d.p. massima raggiungibile è $(10/11)\,V_1$ ovvero $21.8\,\mathrm{V}$ nel caso in esame.

Quesito n. 2.

Se il secondo condensatore viene caricato con entrambe le batterie in serie, alla d.d.p. $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 3\,\mathcal{E}_1 = 18\,\mathrm{V}$, e la sua capacità è scelta opportunamente, allora lo scopo si può raggiungere.

Infatti, ad equilibrio raggiunto il condensatore 2, la cui d.d.p. è passata da

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 3\mathcal{E}_1 = 18\,\mathrm{V} \quad \text{a} \quad V_1 - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = V_1 - 3\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 = 6\,\mathrm{V}\,,$$

avrà ceduto $2/3$ della sua carica iniziale che era $q_0 = 3\mathcal{E}_1\,C_2$; questa carica sarà quella acquistata dal condensatore 1 che si voleva caricare. Dunque

$$q_1 = V_1\,C_1 = \frac{2}{3}\,q_0 = \frac{2}{3}\,3\mathcal{E}_1\,C_2 = 2\,\mathcal{E}_1\,C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{V_1}{2\,\mathcal{E}_1}\,C_1 = 2\,C_1 = 2\,\mathrm{mF}\,.$$

Anche in questo caso si può trovare la risposta in modo più formale. Il calcolo è lo stesso fatto sopra ma adesso si deve porre $q_0 = C_2\,\mathcal{E} = 3\,C_2\mathcal{E}_1$ per cui risulta

$$V_{C_1} = \frac{6\,C_2\,\mathcal{E}_1}{C_1 + C_2}\,.$$

Imponendo che sia $V_{C_1} = V_1 = 4\mathcal{E}_1$, si ricava C_2 in termini di C_1:

$$\frac{6\,C_2\,\mathcal{E}_1}{C_1 + C_2} = 4\mathcal{E}_1 \quad \Rightarrow \quad 2\,C_2\,\mathcal{E}_1 = 4\,C_1\,\mathcal{E}_1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2\,C_1\,.$$

Quesito n. 3.

Siano U_{cond} l'energia immagazzinata nei condensatori, $\mathcal{L}_{\mathrm{G}}$ l'energia ceduta dai generatori al circuito e U_{J} l'energia dissipata per effetto Joule nelle resistenze presenti nel circuito; il bilancio energetico della fase di carica, tra lo stato iniziale e quello finale, si scrive in questo modo

$$U_{\mathrm{fin,cond}} = U_{\mathrm{in,cond}} + \mathcal{L}_{\mathrm{G}} - U_{\mathrm{J}} \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{J}} = -\Delta U_{\mathrm{cond}} + \mathcal{L}_{\mathrm{G}} \quad \text{dove} \quad \mathcal{L}_{\mathrm{G}} = 3\,\mathcal{E}_1\,q_1 = 3\,\mathcal{E}_1\,\frac{2}{3}\,q_0 = 2\,\mathcal{E}_1\,q_0\,.$$

Dunque

$$\mathcal{L}_{\mathrm{G}} = 2\,\mathcal{E}_1\,q_0 = 6\,C_2\,\mathcal{E}_1^2 = 12\,C_1\,\mathcal{E}_1^2 = 0.432\,\mathrm{J}\,;$$

$$U_{\mathrm{in,cond}} = \frac{1}{2}\,C_2(3\,\mathcal{E}_1)^2 = 9\,C_1\,\mathcal{E}_1^2\,;$$

$$U_{\mathrm{fin,cond}} = \frac{1}{2}\,C_2\,\mathcal{E}_1^2 + \frac{1}{2}C_1\,(4\,\mathcal{E}_1)^2 = 9\,C_1\,\mathcal{E}_1^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{\mathrm{cond}} = 0\,;$$

per cui

$$U_{\mathrm{J}} = \mathcal{L}_{\mathrm{G}} = 0.432\,\mathrm{J}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.429 \le U_{\mathrm{J}} \le 0.435 \quad [\,\mathrm{J}\,]}$