Associazione per l'Insegnamento della Fisica

PROGETTO OLIMPIADI

33ª Edizione

Olimpiadi di Fisica 2019

Soluzione

Gara di 2° livello
Giovedì 21 Febbraio 2019

Quesiti

QUESITO n. 1

Sia $L = 400\,\mathrm{m}$ la lunghezza della pista, v la velocità del primo e quindi ηv (con $\eta = 0.95$) la velocità dell'ultimo. Lo spazio percorso dai due al tempo t, è rispettivamente

$$s_1 = vt \quad \text{e} \quad s_2 = \eta vt\,.$$

Il primo raggiunge l'ultimo quando avrà percorso una distanza $s_1 = s_2 + L$. Sostituendo

$$vt = \eta vt + L \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{v\,(1-\eta)} = t_1\,.$$ La distanza percorsa dal primo a quell'istante è quindi

$$D = v\,t_1 = \frac{L}{1-\eta} = 8\,000\,\mathrm{m}\,.$$

Soluzione alternativa

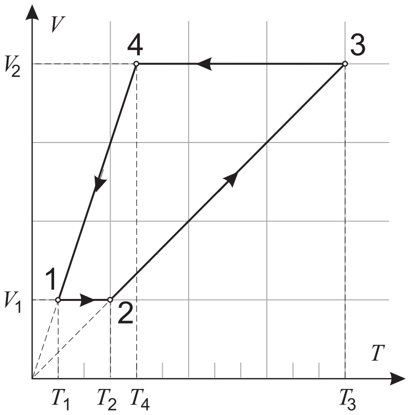
Lo spazio percorso dai due concorrenti è proporzionale alla velocità per cui, posto $v_1 = v$ e $v_2 = \eta\,v$, si ha

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{v_2}{v_1} = \eta \quad \Rightarrow \quad s_2 = \eta\,s_1$$ mentre la condizione sulle distanze si può scrivere come

$$s_1 - s_2 = L \quad \Rightarrow \quad s_1(1-\eta) = L \quad \Rightarrow \quad D = s_1 = \frac{L}{1-\eta}\,.$$

QUESITO n. 2

Occorre determinare le temperature dei 4 stati, esprimendole tutte in funzione di una coppia di variabili, per esempio p_1 e V_1; si ha



$$T_1 = \frac{p_1V_1}{nR};\quad T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} = 3\,\frac{p_1V_1}{nR};$$

$$T_3 = \frac{p_3V_3}{nR} = 12\,\frac{p_1V_1}{nR};\quad T_4 = \frac{p_4V_4}{nR} = 4\,\frac{p_1V_1}{nR}$$

da cui $\quad T_2 = 3\,T_1;\quad T_3 = 12\,T_1;\quad T_4 = 4\,T_1\,.$

Si possono quindi tracciare i punti relativi ai 4 stati nel grafico, fissati (in unità arbitraria) T_1 e V_1 e le trasformazioni $1 \to 2$ e $3 \to 4$ che sono a volume costante.

Considerando poi che, se p è costante, per l'equazione di stato T e V sono proporzionali, anche le altre due trasformazioni sono rappresentate da segmenti di retta (passanti per l'origine).

Il verso di percorrenza, dato dalla sequenza $1 \to 2 \to 3 \to 4$, è antiorario.

NOTA per i correttori ⇒ 1 punto *per i corretti rapporti delle temperature calcolati usando la legge dei gas perfetti;* 1 punto *per la rappresentazione corretta delle trasformazioni;* 1 punto *per gli altri elementi di grafico corretti (grandezze T e V, verso di percorrenza).*

QUESITO n. 3

La variazione dell'intensità del campo magnetico provoca una variazione del flusso magnetico concatenato con la bobina che, per la legge dell'induzione elettromagnetica, genera una forza elettromotrice.

Indicando con n il numero delle spire, A l'area di ognuna di esse e B l'intensità del campo magnetico, la variazione del flusso magnetico concatenato alla bobina è data da $\Delta\Phi = n\,A\,\Delta B\,\cos\theta$ con $\theta = 0$, oppure $\theta = \pi$ in quanto l'asse della bobina è parallelo al campo magnetico, mentre il verso della normale dipende dalla scelta del verso positivo di percorrenza della bobina stessa. Dunque la forza elettromotrice indotta è, in valore assoluto,

$$\mathcal{E} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{nA\,|\Delta B|}{\Delta t} = 126\,\mathrm{mV}\,.$$

RIS ⇒ $\boxed{125 \le \mathcal{E} \le 127 \quad [\,\mathrm{mV}\,]}$

QUESITO n. 4

Il campo elettrico prodotto da una lastra di grande dimensione, lontano dai bordi, può essere approssimato con quello di una lastra infinita di densità di carica σ: $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Nel caso in questione il campo elettrico prodotto dalla lastra A ha modulo $E_\mathsf{A} = Q_\mathsf{A}/(2\varepsilon_0\,S)$ e quello prodotto dalla lastra B, analogamente, $E_\mathsf{B} = Q_\mathsf{B}/(2\varepsilon_0\,S)$; nello spazio tra le due lastre i due campi hanno la stessa direzione e lo stesso verso. Il campo risultante è la somma vettoriale tra i due campi e quindi, in modulo,

$$E = \frac{3\,Q}{2\varepsilon_0\,S} + \frac{5\,Q}{2\varepsilon_0\,S} = \frac{4\,Q}{\varepsilon_0\,S}\,.$$

QUESITO n. 5

L'attività del campione (decadimenti per unità di tempo) è data da un esponenziale decrescente che, in termini di tempo di dimezzamento τ, conviene scrivere in base 2

$$A(t) = A_0\,2^{-t/\tau}$$

Tenuto conto che i tempi di osservazione sono sempre molto minori dell'emivita, l'attività può essere considerata costante durante i conteggi. Nella prima osservazione l'attività (media al minuto) è stata

$$A_0 = (810/6 - 15)\,\mathrm{min}^{-1} = 120\,\mathrm{min}^{-1} \quad \text{e dunque dopo 4 giorni sarà}$$

$$A(4) = (120 \times 2^{-4/16})\,\mathrm{min}^{-1} = 101\,\mathrm{min}^{-1}.$$

Considerando che il fondo è rimasto lo stesso, il numero atteso dei conteggi sarà quindi

$$N = (101\,\mathrm{min}^{-1} + 15\,\mathrm{min}^{-1})(10\,\mathrm{min}) = 1160\,.$$

RIS ⇒ $\boxed{1150 \le N \le 1170}$

NOTA: *Si osservi che l'intervallo dato sul risultato è relativo solo al calcolo numerico e, come indicato nel testo, non tiene conto del fatto che il conteggio è una grandezza affetta da fluttuazioni statistiche, e non si può prevedere con esattezza il numero che il contatore indicherà, ma si può solo prevedere un valore che cade all'interno di un certo intervallo, calcolabile in base all'errore statistico relativo, dato dall'inverso della radice quadrata di numero dei conteggi.*

QUESITO n. 6

Seguendo il suggerimento dato, poiché lo spessore delle facce è piccolo rispetto al lato, il volume del metallo è approssimabile a quello di 6 lastrine piane di lato ℓ e spessore s e la massa della scatola cubica risulta $M = 6\,\ell^2\,s\,\rho_\mathrm{acc}$ mentre la massa d'acqua "spostata", quando se ne versi nel recipiente cilindrico fino ad un'altezza h è $m = \ell^2\,h\,\rho_\mathrm{a}$, dove ρ_a è la densità dell'acqua.

Per il principio di Archimede se la scatola galleggia le due masse sono uguali, quindi

$h = 6s\,\dfrac{\rho_{\mathrm{acc}}}{\rho_{\mathrm{a}}} = 9.48\,\mathrm{mm}\,.$ Deve essere $H \geq h$ e quindi il valore minimo di H è proprio h:

$H_{\min} = h = 9.48\,\mathrm{mm}\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{9.46 \leq H_{\min} \leq 9.50 \quad [\,\mathrm{mm}\,]}$

È interessante osservare che, essendo il raggio del cilindro $r = \ell\sqrt{2}/2$, la massa d'acqua sufficiente al galleggiamento è

$$M_{\mathrm{a}} = (\pi r^2 - \ell^2)H\,\rho_{\mathrm{a}} = (\pi/2 - 1)\,\ell^2 H\,\rho_{\mathrm{a}} = 13.5\,\mathrm{g} \quad \text{mentre la massa del cubo è} \quad M = 6\,\ell^2\,s\,\rho_{\mathrm{acc}} = 23.7\,\mathrm{g}\,.$$

Soluzione senza approssimazione

Il volume del metallo è

$$\mathcal{V} = \ell^3 - (\ell - 2s)^3 = 6\,\ell^2 s - 12\ell s^2 + 8s^3 = 6\,\ell^2\,s\left(1 - 2\frac{s}{\ell} + \frac{4\,s^2}{3\,\ell^2}\right).$$

L'altezza richiesta risulta allora

$H_{\min} = \dfrac{\mathcal{V}}{\ell^2}\,\dfrac{\rho_{\mathrm{acc}}}{\rho_{\mathrm{a}}} = 6\,s\left(1 - 2\dfrac{s}{\ell} + \dfrac{4\,s^2}{3\,\ell^2}\right)\dfrac{\rho_{\mathrm{acc}}}{\rho_{\mathrm{a}}} = 9.40\,\mathrm{mm}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{9.38 \leq H_{\min} \leq 9.42 \quad [\,\mathrm{mm}\,]}$.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Entrambe le procedure di calcolo, purché con il risultato entro l'intervallo indicato per ciascuna di esse, sono da considerare valide.*

QUESITO n. 7

Spostando lo specchio mobile S_1 di un tratto d, la differenza dei due cammini ottici varia di $2\,d$. Poiché si osserva un alternarsi di n frange chiare e n frange scure, si ha

$$2\,d = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\,d}{n} = 0.640 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} = 640\,\mathrm{nm}\,.$$

QUESITO n. 8

La forza d'attrito dinamico vale in modulo $F_{\mathrm{a}} = \mu\,N$ dove N è il modulo della forza normale; poiché la strada è orizzontale $N = mg$ con m pari alla massa totale dell'automobile e del suo carico e g il modulo dell'accelerazione di gravità.

Applicando il teorema delle forze vive, e chiamando s la lunghezza delle tracce, si ha

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 = F_{\mathrm{a}}s \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2\mu g s} = 14.82\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 53.4\,\mathrm{km/h}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{14.79 \leq v_0 \leq 14.85 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$ oppure RIS $\Rightarrow$ $\boxed{53.3 \leq v_0 \leq 53.5 \quad [\,\mathrm{km/h}\,]}$

QUESITO n. 9

Sulla massa m_2 agiscono il peso $\vec{P}_2$ di modulo $m_2 g$ diretto verso il basso e la tensione $\vec{T}_2$ del filo diretta verso l'alto; dato che la massa è in equilibrio, le due forze hanno lo stesso modulo: $T_2 = m_2 g$.

Sulla massa m_1, agisce la forza elastica della molla $\vec{F}_{\mathrm{e}}$ diretta verso l'alto, il peso $\vec{P}_1$ di modulo $m_1 g$ diretto verso il basso e la tensione del filo $\vec{T}_1$ diretta il basso; la condizione di equilibro comporta che $T_1 = F_{\mathrm{e}} - m_1 g$.

Trattandosi di un filo ideale $T_1 = T_2$ e quindi $F_{\mathrm{e}} = (m_1 + m_2)\,g$.

Quando il filo viene bruciato il sistema non è più in equilibrio; poiché istantaneamente la posizione della massa m_1 non varia, anche la forza F_{e} non cambia e dunque

$m_1 a = F_{\mathrm{e}} - m_1 g = m_2 g \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{m_2}{m_1}g = 5.38\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{5.36 \leq a \leq 5.40 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,]}$

QUESITO n. 10

Contando nel disegno si ottiene che nel tratto d sono comprese $n = 5$ lunghezze d'onda. $\lambda = d/n = 12\,\text{cm}$ e quindi la velocità dell'onda è $v = f\,\lambda = f\,d/n = 0.40\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Poiché le onde stazionarie si osservano quando c'è sovrapposizione tra onda incidente e onda riflessa, t è il tempo necessario a percorrere la vaschetta in andata e ritorno, dunque

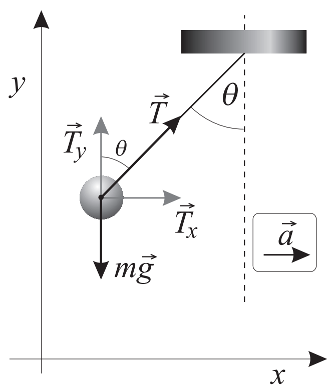
$$2\ell = vt \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{f\,d\,t}{2\,n} = 1.20\,\text{m}\,, \quad \text{pari a 10 lunghezze d'onda.} \qquad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1.19 \le \ell \le 1.21 \quad [\,\text{m}\,]}$$

Problemi

PROBLEMA n. 1 – Pendolo trascinato

Quesito n. 1.

Che il moto debba essere accelerato si capisce senza fare nessun calcolo. Infatti, se non lo fosse, sarebbe rettilineo uniforme ed il sistema di riferimento del pendolo sarebbe inerziale; in tale riferimento il pendolo non potrebbe stare in equilibrio nella posizione mostrata in figura.



Per determinare l'accelerazione si osserva che sul pendolo agiscono due forze: il peso della sfera $\vec{P} = m\vec{g}$ e la tensione del filo $\vec{T}$. Orientando gli assi x e y come in figura e usando le componenti della tensione, la condizione stabilita dal testo è che $T_x/T_y = \text{tg}\,\theta = 1$.

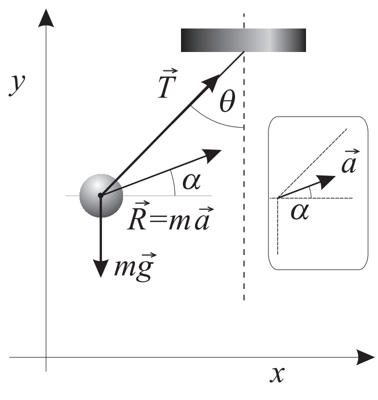
Tenuto conto che il moto è orizzontale e dunque $a_y = 0$, per la seconda legge della dinamica le equazioni relative alle due componenti sono

$$\begin{cases} T_x = ma_x \\ T_y - mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_x = g\ \text{tg}\,\theta = g \\ T = \dfrac{T_x}{\text{sen}\,\theta} = \dfrac{mg}{\text{sen}\,\theta} = \sqrt{2}\,mg\,. \end{cases}$$

Dunque il moto è uniformemente accelerato con accelerazione diretta verso destra, ma – come si vedrà meglio più avanti – conoscendo la sola accelerazione, la velocità non è determinabile.

Quesito n. 2.

Rimuovendo adesso la condizione che il moto sia orizzontale si deve considerare anche la componente di accelerazione a_y e dunque le condizioni angolari e la seconda legge della dinamica per componenti si scrivono



$$\begin{cases} T_x = T_y \\ a_y = a_x\ \text{tg}\,\alpha \\ T_x = ma_x \\ T_y - mg = ma_y \end{cases}$$

dove α è un parametro. Il sistema ha 4 equazioni in 4 incognite (a_x, a_y, T_x, T_y) e dunque queste si possono ricavare in funzione di α. Utilizzando le prime due equazioni del sistema per eliminare T_x e a_x, la terza e quarta equazione si scrivono

$$\begin{cases} T_y\ \text{tg}\,\alpha = ma_y \\ T_y - mg = ma_y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_y = \dfrac{mg}{1-\text{tg}\,\alpha} \\ a_y = \dfrac{g\ \text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha} \end{cases} \quad \text{da cui poi si ricavano} \quad \begin{cases} T_x = \dfrac{mg}{1-\text{tg}\,\alpha} \\ a_x = \dfrac{g}{1-\text{tg}\,\alpha}\,. \end{cases}$$

Di conseguenza, dovendo essere $T_x, T_y > 0$ (in particolare per $\alpha = 0$ come nel caso precedente), occorre che

$$1 - \text{tg}\,\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad -\infty < \text{tg}\,\alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{4}\,. \qquad \text{Infine si ricava} \quad T(\alpha) = \frac{\sqrt{2}\,mg}{1-\text{tg}\,\alpha}\,.$$

Esistono quindi infinite soluzioni, con accelerazione costante, purché la direzione dell'accelerazione sia compresa tra quella di $\vec{T}$ e quella di $\vec{g}$ per cui l'angolo α rispetto all'orizzontale dovrà essere appunto $-\pi/2 < \alpha < \pi/4$. In figura è rappresentato uno dei casi possibili.

Notare che non è possibile un moto del sistema lungo la direzione del filo con una tensione del filo T finita, e neppure con $\vec{a}$ orientato come $\vec{g}$ che darebbe il caso limite $T = 0$, per cui il filo non sarebbe teso.

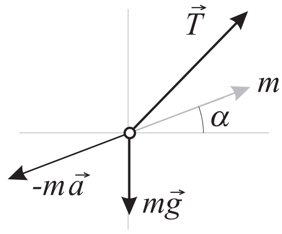
Soluzione alternativa

Alla stessa risposta si può arrivare anche mettendosi nel riferimento del supporto, in cui la sferetta è in equilibrio statico nel piano verticale del supporto; come già detto sopra, tale riferimento non è inerziale e dunque per la condizione di equilibrio occorre considerare anche le forze apparenti, in questo caso una forza di trascinamento, detta inerziale: $\vec{f}_{\text{in}} = -m\vec{a}$, dove $\vec{a}$ è l'accelerazione del sistema in un riferimento inerziale.

L'equilibrio si scrive: $\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{T}/m + \vec{g}$. Ne segue immediatamente che, al variare del modulo T della tensione del filo, il vettore accelerazione è sempre compreso nell'angolo convesso tra $\vec{T}$ e $\vec{g}$ per cui $-\pi/2 < \alpha < \pi/4$ (estremi esclusi come detto sopra).

Fissato adesso il vettore $\vec{a}$, si può scrivere $\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a}$, che in componenti cartesiane nel piano verticale dà

$$\begin{cases} T_x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} T = ma\cos\alpha \\ T_y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} T = mg + ma\,\operatorname{sen}\alpha\,. \end{cases}$$



Ricavando a dalla prima e sostituendo nella seconda

$$T = T(\alpha) = \frac{\sqrt{2}\,mg}{1 - \operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Quesito n. 3.

La sola conoscenza dell'accelerazione non dà nessuna informazione sulla velocità del sistema.

Formalmente, fissato $\alpha = 0$, il vettore accelerazione è $\vec{a} \equiv (a_x, 0, a_z)$. Dato che il filo resta sempre in un piano verticale orientato come in figura, non ci sono forze lungo l'asse z perpendicolare al piano della figura e quindi anche la componente a_z è nulla. La soluzione generale delle equazioni di moto è quindi

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{1}{2}\,a_x\,t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t \\ z(t) = z_0 + v_{0z}t \end{cases}$$

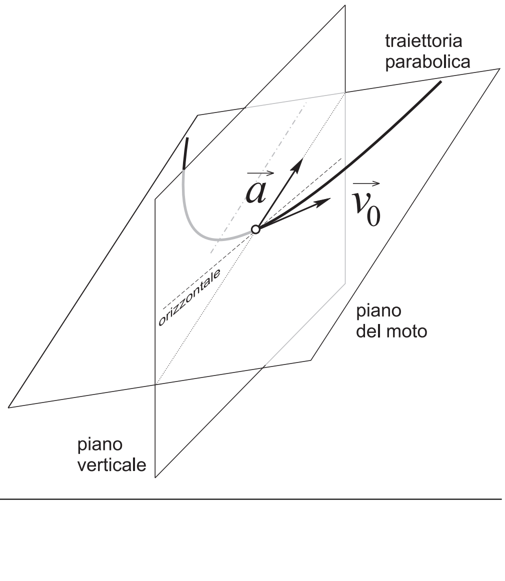
dove tutte le costanti iniziali (con pedice 0) sono arbitrarie. Di conseguenza sono possibili velocità in tutte le direzioni, anche al di fuori del piano verticale della figura, ma non ci sono informazioni sufficienti a determinare un particolare moto e quindi la direzione e il verso della velocità.

In alternativa, ragionando solo in termini di sistemi di riferimento, se si esamina il moto in un altro sistema di riferimento inerziale in moto rispetto al primo con velocità $\vec{V}$ qualunque, la descrizione dinamica resta la stessa e il moto sempre uniformemente accelerato, con l'accelerazione già determinata al punto precedente, ma non necessariamente rettilineo, né vincolato al piano della figura.

Quesito n. 4.

Come ricavato sopra, l'accelerazione $\vec{a}$ è costante, dunque il moto è uniformemente accelerato e la traiettoria più generale nello spazio è una parabola nel piano definito dall'accelerazione $\vec{a}$ e dalla velocità iniziale $\vec{v}_0$, il cui asse è nella direzione di $\vec{a}$ e la concavità rivolta nel verso di $\vec{a}$.

NOTA: *nei casi particolari in cui $v_0 = 0$ oppure $\vec{v}_0$ è parallelo ad $\vec{a}$, il piano non è definito, ma in questi casi si verifica facilmente che il moto è rettilineo, nella direzione dell'accelerazione.*



PROBLEMA n. 2 – Sferetta appesa in un campo elettrico

Quesito n. 1.

Nella regione in cui si trova la sferetta, poiché d è molto minore delle dimensioni della lastra, il campo elettrostatico dato dalla superficie carica può essere approssimato con quello di una lastra infinita e dunque è uniforme e diretto perpendicolarmente alla superficie.

Per la condizione di equilibrio la forza di gravità $m\vec{g}$ diretta verso il basso, la forza attrattiva del campo elettrostatico $\vec{F}_\mathrm{e} = q\vec{E}$ diretta verso la lastra e la tensione del filo $\vec{T}$ hanno risultante nulla. Ne segue che, detto E il modulo del campo elettrostatico,

$$qE = mg\ \mathrm{tg}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad E = \frac{mg}{q}\ \mathrm{tg}\,\alpha = 1.42 \times 10^5\ \mathrm{V\,m^{-1}} \quad \text{campo orientato verso la lastra.}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.41 \le E \le 1.43 \quad [\,10^5\ \mathrm{V\,m^{-1}}\,]}$

Quesito n. 2.

La relazione tra il modulo del campo elettrostatico e la densità di carica è $E = \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$.

Poiché il campo elettrostatico è diretto verso la lastra, la densità di carica è negativa e dunque si ha

$$\sigma = -2\varepsilon_0\, E = -2\varepsilon_0 \frac{mg}{q}\ \mathrm{tg}\,\alpha = -2.51\ \mu\mathrm{C\,m^{-2}} < 0\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{-2.52 \le \sigma \le -2.49 \quad [\ \mu\mathrm{C\,m^{-2}}\,]}$

Quesito n. 3.

Quando il filo si rompe, la tensione del filo $\vec{T}$ si annulla e la forza risultante sulla sferetta ha modulo

$$F = \sqrt{F_\mathrm{e}^2 + (mg)^2} = \sqrt{(qE)^2 + (mg)^2} = mg\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1} = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

e direzione parallela al filo, orientata verso la lastra. L'accelerazione della sferetta è dunque, in modulo,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{g}{\cos\alpha}$$

e risulta costante poiché sia la forza gravitazionale che quella elettrostatica sono costanti e non dipendono dal punto.

Poiché la velocità iniziale è nulla ($v_0 = 0$) il moto è rettilineo e la distanza del punto di impatto con la lastra da H è

$$h = \frac{d}{\mathrm{tg}\,\alpha} = 52.0\,\mathrm{cm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{51.7 \le h \le 52.2 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

Quesito n. 4.

La velocità al momento dell'urto può essere ricavata dalla conservazione dell'energia, tenendo conto sia dell'energia potenziale gravitazionale che di quella elettrostatica le cui variazioni sono rispettivamente

$$\Delta U_\mathrm{g} = -mgh = -\frac{mgd}{\mathrm{tg}\,\alpha} \quad \text{e} \quad \Delta U_\mathrm{e} = -Eqd = -mgd\ \mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{dunque}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \Delta U_\mathrm{g} + \Delta U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}m\left[v^2 - 2dg\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2dg\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha\right)} = \sqrt{\frac{2dg}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}} = 3.69\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.68 \le v \le 3.70 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

Soluzione alternativa

La sferetta, prima di colpire la lastra, percorre uno spazio $s = d/\,\mathrm{sen}\,\alpha$ e, poiché la velocità iniziale è nulla e l'accelerazione è costante, arriverà sulla lastra con una velocità

$$v = \sqrt{2sa} = \sqrt{2\frac{d}{\mathrm{sen}\,\alpha}\frac{g}{\cos\alpha}}\,.$$

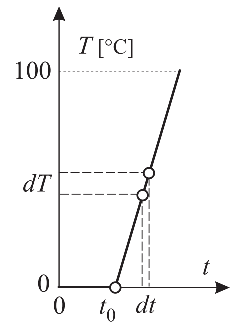
PROBLEMA n. 3 – Trasferimento di calore

NOTA PRELIMINARE: Il grafico allegato al testo è quello del modello matematico che descrive il processo, così come mostrato più avanti, nella "Soluzione alternativa n.2" della domanda 4.

$$T(t) = T_0 \left[1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right] \quad \text{con } T_0 = 40°\text{C},\ t_0 = 2\,\text{min} = 120\,\text{s e } \tau = 10\,\text{min} = 600\,\text{s}\,.$$

I valori numerici considerati nelle soluzioni, ottenuti con misure effettuate sul grafico, sono accompagnati anche dai risultati del calcolo analitico, mentre gli intervalli di accettazione tengono conto delle incertezze – talvolta ampie – dovute alle costruzioni grafiche.

Quesito n. 1.



Il grafico richiesto è del tipo di quello mostrato a fianco.

Il primo tratto orizzontale del grafico corrisponde alla fusione del ghiaccio, senza che la temperatura aumenti. Uguagliando l'energia fornita nell'intervallo da $t = 0$ a $t = t_0$ a quella necessaria per fondere il ghiaccio, detto λ_f il calore di fusione del ghiaccio, risulta

$$P_0\, t_0 = m_0 \lambda_\text{f} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{m_0\, \lambda_\text{f}}{P_0}\,.$$

Analogamente, una volta che la miscela è costituita tutta d'acqua, la variazione di temperatura si determina in termini dell'energia fornita nel tempo dt, essendo c_a il calore specifico dell'acqua,

$$P_0\, dt = c_\text{a} M\, dT \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{P_0}{c_\text{a}\, M}\, dt\,.$$

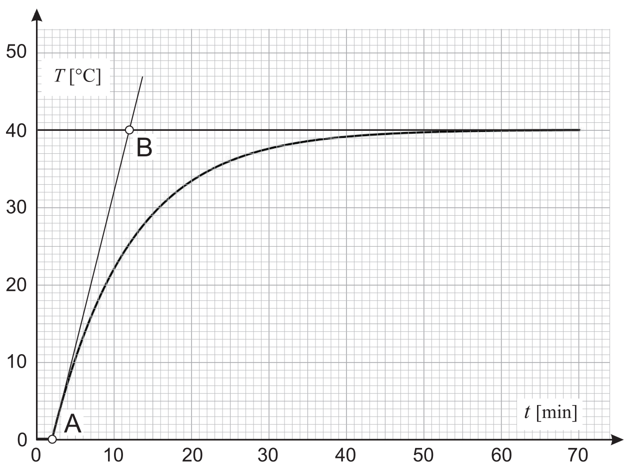
Quesito n. 2.

Come prima, il primo tratto orizzontale del grafico corrisponde alla fusione del ghiaccio. A 0°C la dispersione di calore con l'ambiente è nulla perciò tutta l'energia fornita dal riscaldatore viene impiegata per la fusione del ghiaccio. Dal grafico si ricava $t_0 = 2\,\text{min}$. Si ha

$$m_0 \lambda_\text{f} = P_0\, t_0 \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{P_0\, t_0}{\lambda_\text{f}} = 54.0\,\text{g}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{49.0 \le m_0 \le 59.0 \quad [\text{g}]}$

Quesito n. 3.



Quando il ghiaccio è completamente fuso, la temperatura dell'acqua inizia ad aumentare grazie alla quantità di calore ceduta dal riscaldatore (punto A in figura) e l'aumento dipende dalla massa M. Conviene fare il calcolo utilizzando l'aumento di temperatura in un breve intervallo di tempo dt in prossimità del punto A, quando la temperatura dell'acqua è ancora così vicina alla temperatura ambiente da poter trascurare le dispersioni termiche.

$$c_a\, M\, dT = P_0\, dt \quad \Rightarrow \quad M = \frac{P_0}{c_\text{a}(dT/dt)_{t=t_0}}\,.$$

La massa totale M della miscela (a questo punto solo acqua), perciò, può essere determinata usando il rapporto $\Delta T/\Delta t$, misurato sulla tangente alla curva nel punto A, tracciata sul grafico, come mostrato in figura.

Il valore della pendenza si può trovare usando i punti A $\equiv (2, 0)$ e B $\equiv (12, 40)$ sul grafico allegato; le coordinate dei punti sono espresse rispettivamente in minuti e in °C; la stessa cosa varrà anche nel seguito, in modo sottinteso. Risulta

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=t_0} = 4.0\,\text{K}\,\text{min}^{-1} = 67\,\text{mK}\,\text{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad M = 0.54\,\text{kg}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.47 \le M \le 0.61 \quad [\text{kg}]}$

Analiticamente si otterrebbe $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=t_0} = \frac{T_0}{\tau} = 4.00\,\mathrm{K\,min^{-1}} = 66.7\,\mathrm{mK\,s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad M = 0.538\,\mathrm{kg}\,.$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Per gli intervalli di temperatura l'unità usata qui è il kelvin (K) con i suoi sottomultipli (es. mK); nel S.I. è ammesso l'uso, del tutto equivalente, del grado Celsius (°C).*

Quesito n. 4.

La funzione rappresentata ha un asintoto orizzontale a $T_0 = 40°\mathrm{C}$. A tale temperatura la potenza immessa nel sistema è uguale alla potenza ceduta all'ambiente. Da ciò $P_0 = \alpha\, T_0$ da cui

$$\alpha = \frac{P_0}{T_0} = 3.75\,\mathrm{W\,K^{-1}}\,.$$

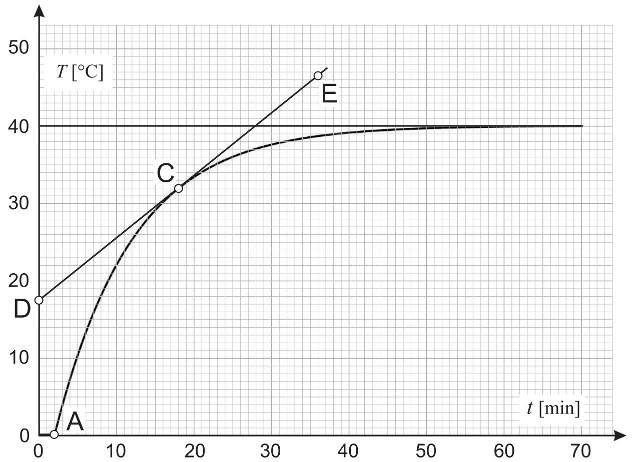
RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.73 \le \alpha \le 3.77 \quad [\mathrm{W\,K^{-1}}]}$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Ad uso delle commissioni di correzione, si riportano di seguito alcune possibili soluzioni alternative di questo quesito.*

▷ Soluzione alternativa 1

Poiché il sistema non è isolato, la differenza tra l'energia assorbita ogni secondo dal sistema e quella ceduta all'ambiente nell'istante t_1 (cui corrisponde la temperatura T_1) è data da

$$P_0 - \alpha T_1 = c_\mathrm{a}\, M \left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=t_1}\,.$$



Il parametro α può essere determinato dalla pendenza della curva al tempo t_1:

$$\alpha = \frac{P_0 - c_\mathrm{a}\, M\, (dT/dt)_{t=t_1}}{T_1}\,.$$

Scelto ad esempio $t_1 = 18\,\mathrm{min}$, il valore della pendenza nel punto C $\equiv (18, 32)$ è stato trovato tracciando la retta tangente in questo punto e fissando, sulla retta tangente, i punti D $\equiv (0, 17.5)$ ed E $\equiv (36, 46.5)$; il coefficiente angolare della retta tangente risulta

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=t_1} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = 0.81\,\mathrm{K\,min^{-1}} = 13.4\,\mathrm{mK\,s^{-1}}$$

da cui $\alpha = 3.74\,\mathrm{W\,K^{-1}}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.63 \le \alpha \le 3.85 \quad [\mathrm{W\,K^{-1}}]}$.

Soluzione analitica: $\left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=t_1} = \frac{T_0}{\tau}\, e^{-(t_1-t_0)/\tau} = 0.806\,\mathrm{K\,min^{-1}} = 13.4\,\mathrm{mK\,s^{-1}}\,.$

▷ Soluzione alternativa 2

Riprendendo l'equazione $P_0 - \alpha T = c_\mathrm{a}\, M \frac{dT}{dt}$, si può scrivere

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha}{c_\mathrm{a}\, M} T(t) + \frac{P_0}{c_\mathrm{a}\, M}\,.$$

La variazione di temperatura nel tempo è una funzione lineare della temperatura stessa. Il modello matematico è lo stesso della carica di un condensatore (circuito RC):

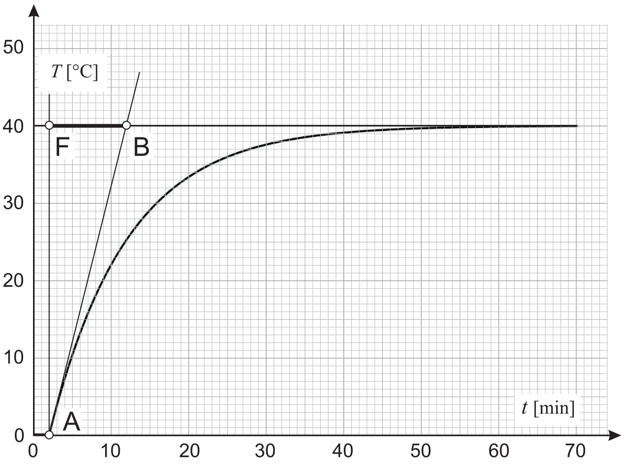
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}\, q(t) + \frac{V_0}{R}$$

che ha come soluzione la funzione $q(t) = q_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, con q_∞ carica a regime e $\tau = RC$ costante di tempo del circuito RC considerato.

Ragionando per analogia si ha

$$T(t) = T_\infty \left[1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right]$$

con T_∞, valore asintotico di T, pari a $T_0 = 40°\mathrm{C}$, $t_0 = 2\,\mathrm{min}$, ricavato dal grafico, e $\tau = (c_\mathrm{a}\,M)/\alpha$.



Anche il valore di τ si può ricavare dalla figura a fianco, tenendo conto che la derivata della funzione $T(t)$ in $t = t_0$ è $(dT/dt)_{(t=t_0)} = T_0/\tau$; quindi il segmento FB dà direttamente $\tau = 10\,\mathrm{min} = 600\,\mathrm{s}$.

Con questi valori si ricava

$$\alpha = \frac{c_\mathrm{a} M}{\tau} = 3.75\,\mathrm{W\,K^{-1}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.73 \le \alpha \le 3.77 \quad [\mathrm{W\,K^{-1}}]}$

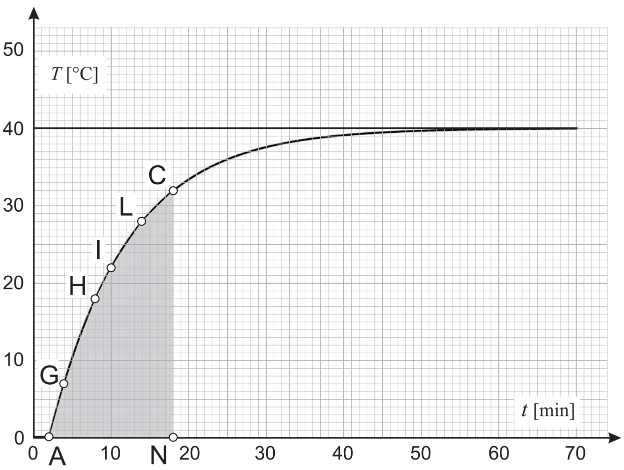
NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Ovviamente è considerata valida anche una risoluzione matematica dell'equazione differenziale.*

▷ Soluzione alternativa 3

Riprendendo l'equazione $P_0 - \alpha T = c_\mathrm{a}\,M\dfrac{dT}{dt}$, e integrando tra t_0 e un istante arbitrario t', si può scrivere

$$\int_{t_0}^{t'} P_0 dt - \int_{t_0}^{t'} \alpha T dt = c_\mathrm{a}\,M \int_{t_0}^{t'} \left(\frac{dT}{dt}\right) dt \quad \text{da cui si ricava} \quad P_0(t'-t_0) - \alpha \int_{t_0}^{t'} T dt = c_\mathrm{a}\,M\,(T' - T_0)\,.$$

L'integrale $\displaystyle\int_{t_0}^{t'} T\,dt$ è l'area del triangolo mistilineo definito dall'asse dei tempi, dal grafico di $T(t)$ e dalla retta $t = t'$.



Il valore dell'integrale si può ricavare dal grafico, con diversi metodi. Per esempio, con il metodo dei trapezi come mostrato in figura; scelto $t' = 18\,\mathrm{min}$ e utilizzando il trapezoide definito dai punti A $\equiv (2,0)$, G $\equiv (4,7)$, H $\equiv (8,18)$, I $\equiv (10,22)$, L $\equiv (14,28)$, C $\equiv (18,32)$, si trova un valore approssimato (per difetto) pari a

$$\int_{t_0}^{t'} T\,dt = 317\,\mathrm{min\,K} = 19020\,\mathrm{s\,K}\,.$$

Quindi, essendo $t' - t_0 = 16\,\mathrm{min} = 960\,\mathrm{s}$, si ha

$$\alpha = \frac{P_0(t'-t_0) - c_\mathrm{a}\,M\,(T'-T_0)}{\int_{t_0}^{t'} T dt} = 3.79\,\mathrm{W\,K^{-1}}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.85 \le \alpha \le 4.65 \quad [\mathrm{W\,K^{-1}}]}$

Il corrispondente calcolo analitico dà

$$\int_{t_0}^{t'} T\,dt = T_0\left[(t'-t_0) + \tau\,e^{-(t'-t_0)/\tau} - \tau\right] = 320.8\,\mathrm{min\,K}\,.$$

Quesito n. 5.

Se l'acqua non raggiunge la temperatura di ebollizione $T_\mathrm{e} = 100°\mathrm{C}$, significa che l'energia dissipata nell'ambiente, ad un certo istante, uguaglia l'energia immessa nel sistema senza che l'acqua abbia cominciato a bollire. La massima potenza perché ciò accada è determinata dalla condizione

$$T_0 = \frac{P_\mathrm{max}}{\alpha} < T_\mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad P_\mathrm{max} < \alpha\, T_\mathrm{e} = 375\,\mathrm{W}\,. \qquad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{373 \le P_\mathrm{max} \le 377 \quad [\,\mathrm{W}\,]}$$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *L'intervallo indicato è relativo al primo metodo di soluzione. Qualora lo studente avesse adottato un metodo diverso, occorre utilizzare un intervallo coerente con quelle di* α.

Quesito n. 6.

Procedendo come nella Soluzione alternativa 2 della domanda 4, si ricava l'equazione del modello matematico, dove adesso si indica con $T^\star$ il valore asintotico che la temperatura raggiungerebbe se non ci fosse ebollizione.

$$T(t) = T^\star \left[1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right] \quad \text{con} \quad T^\star = \frac{P^\star}{\alpha},\ t_0 = \frac{m_0 \lambda_\mathrm{f}}{P^\star} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{c_\mathrm{a}\, M}{\alpha}\,.$$

Detto $t^\star$ il tempo trascorso dall'inizio della fusione del ghiaccio all'ebollizione dell'acqua, deve essere

$$T(t^\star) = T_\mathrm{e} = 100°\mathrm{C}\,.$$

Poiché il coefficiente α è lo stesso di prima, si ha che $P_0/T_0 = P^\star/T^\star$, e si ottiene

$$t^\star = t_0 + \tau \,\ln \frac{T^\star}{T^\star - T_\mathrm{e}} = t_0 + \tau \,\ln \frac{P^\star T_0}{P^\star T_0 - P_0 T_\mathrm{e}}\,.$$

Se la potenza emessa dal riscaldatore elettrico vale $P^\star = 425\,\mathrm{W}$, si ricava

$$t^\star = 23\,\mathrm{min}\,. \qquad \text{RIS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{19 \le t^\star \le 27 \quad [\,\mathrm{min}\,]}$$